Theoretische Teilchenphysik I

V: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 4

Abgabe: Mo., 21.5.'13, 14.00 Uhr, EG Physikhochhaus.

Aufgabe 6: Lösungen der Dirac–Gleichung **[5]**

$p = (E, \vec{p})$ sei der Impuls eines Fermions der Masse m. Weiterhin seien die beiden Spinoren

$$\chi_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|(|\vec{p}| + p_z)}} \begin{pmatrix} |\vec{p}| + p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} , \qquad \chi_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|(|\vec{p}| + p_z)}} \begin{pmatrix} -p_x + ip_y \\ |\vec{p}| + p_z \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass χ_+ und χ_- Weyl Spinoren mit Helizität $+\frac{1}{2}$ bzw. $-\frac{1}{2}$ sind, also

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi_\pm(p) = \pm \chi_\pm(p) .$$

(b) Zeigen Sie, dass in der chiralen Darstellung der Gamma Matrizen die beiden Spinoren

$$u(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{E + \lambda|\vec{p}|}\chi_\lambda(p) \\ \sqrt{E - \lambda|\vec{p}|}\chi_\lambda(p) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\sqrt{E - \lambda|\vec{p}|}\chi_{-\lambda}(p) \\ -\lambda\sqrt{E + \lambda|\vec{p}|}\chi_{-\lambda}(p) \end{pmatrix}$$

die Dirac–Gleichung erfüllen.

(c) Zeigen Sie die Orthogonalitätsrelationen

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, \lambda)u(p, \lambda') &= 2m\delta_{\lambda\lambda'} , \\ \bar{v}(p, \lambda)v(p, \lambda') &= -2m\delta_{\lambda\lambda'} , \\ \bar{u}(p, \lambda)v(p, \lambda') &= 0 , \\ \bar{v}(p, \lambda)u(p, \lambda') &= 0 . \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Impulsoperator des Dirac–Feldes **[5]**

Die allgemeine Lösung der Diracgleichung wird wie folgt in ebene Wellen entwickelt (s. Vorlesung),

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi^3)2E_p} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[b_\alpha(p)u_\alpha(p)e^{-ip\cdot x} + d_\alpha^\dagger(p)v_\alpha(p)e^{ip\cdot x} \right] .$$

Darin sind $u_{(1,2)}$ und $v_{(1,2)}$ die Spinoren zu positiver und negativer Energie. $b_{(1,2)}$ und $d_{(1,2)}$ sind hier zunächst einfach Entwicklungskoeffizienten, über die wir keine weiteren Annahmen machen wollen. Insbesondere sollen b_α und d_α nicht unbedingt (anti–)vertauschbar sein.

Drücken Sie den Impuls des Diracfeldes,

$$P^\mu = \int d^3\vec{x} T^{0\mu} = \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) i\partial^\mu \psi(x)$$

durch $b_\alpha(p)$, $b_\alpha^\dagger(p)$, $d_\alpha(p)$, $d_\alpha^\dagger(p)$ aus.