KIT **SS 2013**

Theoretische Teilchenphysik I

V: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 5

Abgabe: Mo., 3.6.'13, 14.00 Uhr, EG Physikhochhaus.

Aufgabe 8: Sigma–Modell **[5]**

Das „σ–Modell" beschreibt ein masseloses Dirac–Feld ψ das an ein komplexes skalares Feld $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\pi)$ koppelt. Die Lagrange–Dichte des Modells lautet

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_I \;,$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \;, \\ \mathcal{L}_\phi &= (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \;. \end{aligned}$$

Der Wechselwirkungsterm lautet

$$\mathcal{L}_I = g(\bar{\psi}\psi\sigma + i\bar{\psi}\gamma_5\psi\pi) \;.$$

(a) Abgesehen von der einfachen Phasentransformation $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, ist die Lagrangedichte $\mathcal{L}_\psi$ für sich genommen auch unter der *chiralen Transformation*

$$\psi \to e^{i\beta\gamma_5}\psi \;, \qquad\qquad \psi^\dagger \to \psi^\dagger e^{-i\beta\gamma_5}$$

invariant. Beweisen Sie das und bestimmen Sie den für $g = 0$ erhaltenen Strom.

(b) Welcher Strom resultiert für $g = 0$ aus der Invarianz von $\mathcal{L}_\phi$ unter der folgenden Transformation?

$$\phi \to e^{i\theta}\phi \;, \qquad\qquad \phi^\dagger \to e^{-i\theta}\phi^\dagger \;.$$

(c) Bei $g \neq 0$ lassen die beiden Transformation aus (a) und (b) die volle Lagrange–Dichte $\mathcal{L}$ nicht mehr invariant. $\mathcal{L}$ bleibt jedoch bei einer *simultanen* Transformation von $\psi, \psi^\dagger$ und $\phi, \phi^\dagger$ invariant. Bestimmen Sie die lineare Beziehung zwischen β und θ, die $\mathcal{L}$ invariant lässt.

(d) Diese Relation zwischen β und θ definiert eine Symmetrie von $\mathcal{L}$ bei $g \neq 0$. Bestimmen Sie den dazugehörigen erhaltenen Strom.

[Eine etwas komplexere Variante dieses Modells, mit 2 Spinorfeldern (Proton und Neutron) sowie zwei komplexen Skalaren (π^+ und π^-, π^0 und σ) beschreibt die chiralen Transformationseigenschaften der starken Wechselwirkung. Diese chirale Symmetrie ist spontan gebrochen, mit den Pionen als Goldstone–Bosonen — dazu später mehr!]

(b.w.)

Aufgabe 9: Antikommutator des Fermionfeldes **[5]**

Zeigen Sie unter Verwendung der Antikommutatoren für die Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren die Antivertauschungsrelationen für ein quantisiertes Fermionenfeld,

$$\{\psi_r(\vec{x},t), \bar{\psi}_s(\vec{y},t)\} = \gamma^0_{rs}\delta(\vec{x}-\vec{y}) ,$$
$$\{\psi_r(\vec{x},t), \psi_s(\vec{y},t)\} = \{\bar{\psi}_r(\vec{x},t), \bar{\psi}_s(\vec{y},t)\} = 0 .$$

Hinweis: Rechnen Sie zunächst für allgemeine x^0, y^0. Diskutieren Sie dann anhand der Distribution $i\Delta(x-y)$ den Spezialfall $x^0 = y^0 = t$.