Theoretische Teilchenphysik I

V: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 6

Abgabe: Mo., 10.6.'13, 14.00 Uhr, EG Physikhochhaus.

Aufgabe 10: Vakuum–Fluktuationen [5]

Wir betrachten ein quantisiertes, reelles Klein–Gordon Feld. Das Feld werde zur Zeit $t = 0$ über eine Kugel vom Radius R gemittelt ($V = \frac{4\pi}{3}R^3$),

$$\phi_R = \frac{1}{V}\int_{|\vec{x}|<R} \mathrm{d}^3\vec{x}\,\phi(\vec{x}) \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Vakuum–Erwartungswert (VEV) von ϕ_R verschwindet,

$$\langle\, 0 \,|\, \phi_R \,|\, 0 \,\rangle = 0 \,.$$

(b) Berechnen Sie

$$\langle\, 0 \,|\, \phi_R^2 \,|\, 0 \,\rangle$$

für den Fall $m = 0$. (Da der VEV von ϕ_R zwar verschwindet, nicht aber der VEV von ϕ_R^2, kann das Feld selbst im Vakuum nicht konstant sein. Es *fluktuiert* vielmehr innerhalb der gegebenen Kugel vom Radius R.) Muss R vergrössert oder verkleinert werden, um die Fluktuationen zu vergrössern?

Hinweis: Das folgende Integral der Bessel–Funktion

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

ist nützlich:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{a^2+y^2}}\,[J_{3/2}(x)]^2 \,.$$

Für $a = 0$ gilt

$$I(0) = \frac{1}{2\pi} \,.$$

Aufgabe 11: Spuren von Gamma Matrizen [5]

Zeigen Sie mit Hilfe der γ_5 Matrix $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$, $\gamma_5^2 = 1$ und den Ergebnissen aus Aufgabe 2 die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(\text{ungerade Anzahl von } \gamma\text{–Matrizen}) &= 0 \,,\\
\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} \,,\\
\mathrm{tr}\,(\gamma_5) &= 0 \,,\\
\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5) &= 0 \,,\\
\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \,.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ total antisymmetrisch mit $\epsilon^{0123} = +1$.