# Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. S. Gieseke

## Übungsblatt 11

Besprechung: Mi, 3.2.'16

### Aufgabe 13: Dilogarithmus

Eine spezielle Funktion, die sehr häufig bei der Berechnung von Schleifenintegralen vorkommt, ist der Dilogarithmus

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{t}\mathrm{d}t \,.$$

Auf dem Hauptzweig, durch den Hauptzweig des $\ln(z)$ festgelegt, ist $\mathrm{Li}_2(z)$ eine eindeutige analytische Funktion für $z \in \mathbb{C}$, ausgenommen auf dem Schnitt $z > 1$ entlang der reellen Achse. Für $|z| < 1$ bekommen wir aus den Integraldarstellungen die Reihenentwicklung

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \,.$$

Als spezieller Wert ergibt sich daraus $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Um $\mathrm{Li}_2(z)$ außerhalb des Einheitskreises auswerten zu können, benötigen wir Transformationsformeln zur analytischen Fortsetzung. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$(a) \qquad \mathrm{Li}_2(1-z) = -\mathrm{Li}_2(z) - \ln(1-z)\ln z + \frac{\pi^2}{6} \,,$$

$$(b) \qquad \mathrm{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -\mathrm{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\ln^2(1-z) \,,$$

$$(c) \qquad \mathrm{Li}_2\left(\frac{z-1}{z}\right) = \mathrm{Li}_2(z) + \ln(1-z)\ln z - \frac{1}{2}\ln^2(z) - \frac{\pi^2}{6} \,,$$

$$(d) \qquad \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\ln^2(-z) - \frac{\pi^2}{6},$$

$$(e) \qquad \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{1-z}\right) = \mathrm{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\ln^2(1-z) + \ln(1-z)\ln(-z) + \frac{\pi^2}{6} \,.$$

**Aufgabe 14: Higgs Zerfall $h^0 \to gg$ (Fortsetzung von Aufgabe 10)**

Das Ergebnis aus Aufgabe 10 war die Partialbreite

$$\Gamma(h^0 \to gg) = \frac{\alpha_S G_F m_h^3}{36\pi^3\sqrt{2}} \left| \sum_q f(x) \right|^2 ,$$

mit $x = m_h^2/m_q^2$. Die Integrationen in

$$f(x) = 3 \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}z \frac{1-4yz}{1-xyz} .$$

wurden noch nicht ausgeführt. Holen Sie das mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 13 nach! Das Resultat ist

$$f(x) = \frac{6}{x} - \frac{6(4-x)}{x^2} \arcsin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) .$$