Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 2

Besprechung: Mi, 4.11.'15

Aufgabe 2: SU(N) Darstellungen

Die Generatoren der *fundamentalen Darstellung* der SU(N) sind die λ–Matrizen (*Gell–Mann Matrizen* für den Spezialfall der SU(3)):

$$\lambda^a_{ij}, \qquad a = 1, \ldots, N^2-1, \qquad i, j = 1, \ldots, N\,.$$

Die λ–Matrizen sind durch die Beziehung

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

normiert und erfüllen die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{a=1}^{N^2-1}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{kl} \equiv \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{2N}\delta_{ij}\delta_{kl}\,. \tag{1}$$

Sie erfüllen die folgenden Vertauschungs– und Antivertauschungsrelationen,

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = i f_{abc}\frac{\lambda^c}{2}\,, \tag{2}$$

$$\left\{\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right\} = d_{abc}\frac{\lambda^c}{2} + \frac{1}{N}\delta^{ab}\,, \tag{3}$$

wodurch die total antisymmetrischen SU(N) Strukturkonstranten f_{abc} und die total symmetrischen d_{abc} Symbole definiert sind. Die Vertauschungsrelation (2) ist für jede Darstellung der SU(N) mit Generatoren L^a erfüllt, nicht jedoch (3).

(a) Zeigen Sie für eine beliebige Darstellung der SU(N), dass

$$C_2 = L^a L^a \left(= \sum_{a=1}^{N^2-1} L^a L^a\right)$$

eine Casimir–Invariante ist, d.h. dass $[C_2, L^a] = 0$ für alle Generatoren L^a.

(b) Zeigen Sie dass die $N \times N$ Matrizen

$$L^a = -\frac{\lambda^{a*}}{2}$$

eine Darstellung der Lie Algebra der $\mathrm{SU}(N)$ sind. D.h. die Matrizen erfüllen eine zu (2) analoge Vertauschungsrelation (Beachten Sie, dass λ^{a*} die komplex konjugierte Matrix ist, *nicht* die hermitesch konjugierte!). Diese L^a sind Generatoren der $\bar{N}$ („N–bar“) Darstellung der $\mathrm{SU}(N)$, mit Darstellungsmatrizen $U(\theta)^*$.

(c) Berechnen Sie den Wert von C_2 sowohl für die fundamentale Darstellung (N) als auch für die $(\bar{N})$–Darstellung.

(d) Leiten Sie aus der Jacobi–Identität für gemischte Vertauscher und Antivertauscher

$$[A, \{B, C\}] + [B, \{C, A\}] + [C, \{A, B\}] = 0$$

eine Beziehung zwischen den f_{abc} und den d_{abc} her (analog zu der in der Vorlesung diskutierten Beziehung zwischen den f_{abc}).

(e) Zeigen Sie, dass

$$C_3 = d_{abc} L^a L^b L^c$$

eine Casimir Invariante der $\mathrm{SU}(N)$ ist.

(f) Verwenden Sie (1) um die Summe über a in

$$\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2}$$

auszuführen.

(g) Bestimmen Sie den Wert von C_3 für die (N)– und die $(\bar{N})$ Darstellungen. Das Ergebnis zeigt, dass (N) und $(\bar{N})$ für $N > 2$ keine äquivalenten Darstellungen mehr sind.