

Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 3

Besprechung: Mi, 11.11.'15

Aufgabe 3: $q\bar{q} \rightarrow gg$

Die Farb- und Spin- gemittelte/summierte quadrierte Amplitude für den Prozess $q\bar{q} \rightarrow gg$ ist durch

$$\bar{\Sigma}|M|^2 = \frac{1}{9} \bar{\Sigma}_{\text{pol}} \left[c_+ |M^{(+)}|^2 + c_- |M^{(-)}|^2 \right]$$

gegeben. Darin sind c_{\pm} die Farbfaktoren

$$c_{\pm} = \text{tr} \frac{1}{2} (T^a T^b \pm T^b T^a) \frac{1}{2} (T^b T^a \pm T^a T^b).$$

Hierin wird über doppelte Indices summiert.

- (a) Leiten Sie die obige Struktur des Amplitudenquadrats aus den Feynandiagrammen her.
- (b) Wir untersuchen die Farbfaktoren c_{\pm} in einer beliebigen Darstellung der $SU(N)$, gegeben durch die Generatoren T^a und die Dimension d_f der Darstellung. Sie können durch den quadratischen Casimiroperator $C_2(f) = T^a T^a$ der Quark-Darstellung und $C_2(\text{adj})$ der adjungierten Darstellung ausgedrückt werden, wobei über doppelte Indizes summiert wird. Für Quarks in der fundamentalen Darstellung können die c_{\pm} direkt mit Hilfe der Identität

$$\frac{\lambda^a}{2}{}_{ij} \frac{\lambda^a}{2}{}_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{kl} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

ausgerechnet werden ($\frac{\lambda^a}{2}$ sind die Generatoren T^a der fundamentalen Darstellung).

- (c) Zeigen Sie die Identität

$$T^a T^b T^a = \left(C_2(R) - \frac{1}{2} C_2(\text{adj}) \right) T^b \quad (1)$$

für eine beliebige Darstellung R .

- (d) Die Generatoren der adjungierten Darstellung F^a sind durch die Strukturkonstanten f^{abc} gegeben, $(F^a)_{bc} = -i f^{abc}$. Bestimmen Sie $C_2(\text{adj})$ aus (1) mit der fundamentalen Darstellung f , mit $C_2(f) = \frac{N^2-1}{2N}$ und $d_f = N$.
- (e) Bestimmen Sie die Farbfaktoren c_{\pm} für eine beliebige Fermiondarstellung und zeigen Sie $c_+ = 7/3$ und $c_- = 3$ für die fundamentale Darstellung.

Aufgabe 4: $q\bar{q} \rightarrow gg$ Wirkungsquerschnitt

(Fortsetzung von Aufgabe 2). Verwenden Sie im folgenden

$$M^{(\pm)} = M_{\mu\nu}^{(\pm)} \epsilon_1^{*\mu} \epsilon_2^{*\nu} .$$

sowie

$$M_{\mu\nu}^{(-)} = -g^2 \bar{v}(p_2) \left\{ -\gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_1} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2} \gamma_\nu - \frac{2}{(p_1 + p_2)^2} [g_{\mu\nu} (\not{k}_1 - \not{k}_2) + 2k_{2\mu} \gamma_\nu - 2k_{1\nu} \gamma_\mu] \right\} u(p_1) .$$

(a) Zeigen Sie, dass für $M_{\mu\nu}^{(-)}$ die Stromerhaltung gilt:

$$M_{\mu\nu}^{(-)} k_1^\mu = M_{\mu\nu}^{(-)} k_2^\nu = 0 .$$

(b) Berechnen Sie die polarisationsgemittelten Terme

$$\bar{\sum}_{\text{pol}} |M^{(+)}|^2 \quad \text{und} \quad \bar{\sum}_{\text{pol}} |M^{(-)}|^2 .$$

Drücken Sie Ihr Resultat durch die Mandelstamvariablen $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - k_1)^2$ und $u = (p_1 - k_2)^2$ aus.

(c) Drücken Sie die Impulse im Schwerpunktsystem durch s und den Streuwinkel θ aus. Ersetzen Sie dann t und u durch s, θ und berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt mit Hilfe des Phasenraums

$$d\Phi_2 = \frac{1}{32\pi} d\cos\theta d\phi .$$