

## Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. S. Gieseke

### Übungsblatt 3

Besprechung: Mi, 11.11.'15

#### Aufgabe 3: $q\bar{q} \rightarrow gg$

Die Farb- und Spin-gemittelte/summierte quadrierte Amplitude für den Prozess  $q\bar{q} \rightarrow gg$  ist durch

$$\bar{\sum} |M|^2 = \frac{1}{9} \bar{\sum}_{\text{pol}} \left[ c_+ |M^{(+)}|^2 + c_- |M^{(-)}|^2 \right]$$

gegeben. Darin sind  $c_{\pm}$  die Farbfaktoren

$$c_{\pm} = \text{tr} \frac{1}{2} (T^a T^b \pm T^b T^a) \frac{1}{2} (T^b T^a \pm T^a T^b).$$

Hierin wird über doppelte Indices summiert.

- (a) Leiten Sie die obige Struktur des Amplitudenquadrats aus den Feynandiagrammen her.
- (b) Wir untersuchen die Farbfaktoren  $c_{\pm}$  in einer beliebigen Darstellung der  $SU(N)$ , gegeben durch die Generatoren  $T^a$  und die Dimension  $d_f$  der Darstellung. Sie können durch den quadratischen Casimiroperator  $C_2(f) = T^a T^a$  der Quark-Darstellung und  $C_2(\text{adj})$  der adjungierten Darstellung ausgedrückt werden, wobei über doppelte Indizes summiert wird. Für Quarks in der fundamentalen Darstellung können die  $c_{\pm}$  direkt mit Hilfe der Identität

$$\frac{\lambda^a}{2} {}_{ij} \frac{\lambda^a}{2} {}_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{kl} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

ausgerechnet werden ( $\frac{\lambda^a}{2}$  sind die Generatoren  $T^a$  der fundamentalen Darstellung).

- (c) Zeigen Sie die Identität

$$T^a T^b T^a = \left( C_2(R) - \frac{1}{2} C_2(\text{adj}) \right) T^b \quad (1)$$

für eine beliebige Darstellung  $R$ .

- (d) Die Generatoren der adjungierten Darstellung  $F^a$  sind durch die Strukturkonstanten  $f^{abc}$  gegeben,  $(F^a)_{bc} = -i f^{abc}$ . Bestimmen Sie  $C_2(\text{adj})$  aus (1) mit der fundamentalen Darstellung  $f$ , mit  $C_2(f) = \frac{N^2-1}{2N}$  und  $d_f = N$ .
- (e) Bestimmen Sie die Farbfaktoren  $c_{\pm}$  für eine beliebige Fermiondarstellung und zeigen Sie  $c_+ = 7/3$  und  $c_- = 3$  für die fundamentale Darstellung.

**Aufgabe 4:  $q\bar{q} \rightarrow gg$  Wirkungsquerschnitt**

(Fortsetzung von Aufgabe 2). Verwenden Sie im folgenden

$$M^{(\pm)} = M_{\mu\nu}^{(\pm)} \epsilon_1^{*\mu} \epsilon_2^{*\nu} .$$

sowie

$$M_{\mu\nu}^{(-)} = -g^2 \bar{v}(p_2) \left\{ -\gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_1} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2} \gamma_\nu - \frac{2}{(p_1 + p_2)^2} [g_{\mu\nu} (\not{k}_1 - \not{k}_2) + 2k_{2\mu} \gamma_\nu - 2k_{1\nu} \gamma_\mu] \right\} u(p_1) .$$

(a) Zeigen Sie, dass für  $M_{\mu\nu}^{(-)}$  die Stromerhaltung gilt:

$$M_{\mu\nu}^{(-)} k_1^\mu = M_{\mu\nu}^{(-)} k_2^\nu = 0 .$$

(b) Berechnen Sie die polarisationsgemittelten Terme

$$\bar{\sum}_{\text{pol}} |M^{(+)}|^2 \quad \text{und} \quad \bar{\sum}_{\text{pol}} |M^{(-)}|^2 .$$

Drücken Sie Ihr Resultat durch die Mandelstamvariablen  $s = (p_1 + p_2)^2$ ,  $t = (p_1 - k_1)^2$  und  $u = (p_1 - k_2)^2$  aus.

(c) Drücken Sie die Impulse im Schwerpunktsystem durch  $s$  und den Streuwinkel  $\theta$  aus. Ersetzen Sie dann  $t$  und  $u$  durch  $s, \theta$  und berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt mit Hilfe des Phasenraums

$$d\Phi_2 = \frac{1}{32\pi} d\cos\theta d\phi .$$