KIT **WS 2015/16**

Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 5

Besprechung: Mi, 2.12.'15

Aufgabe 6: Grassmann–Variablen

(a) Betrachten Sie das Gauß–Integral im Raum der N reellen Grassmann–Variablen θ_i ($i = 1, \ldots, N$):

$$I_N(M;\chi) = \int \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_N \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta + \chi^T \theta} \,,$$

wobei M eine beliebige antisymmetrische Matrix und $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_N)$ ein Vektor von N unabhängigen Grassmann–Variablen sind.

Zeigen Sie für $N = 4$, dass

$$I_4(M;\chi = 0) = \sqrt{\det M} \,,$$

indem Sie das Integral explizit auswerten.

(b) Zeigen Sie für nichtverschwindende χ und $N = 4$, dass

$$I_4(M;\chi) = \sqrt{\det M}\, \mathrm{e}^{c\chi^T M^{-1} \chi} \,.$$

Bestimmen Sie die reelle Konstante c.

Hinweis: Die inverse der Matrix M ist durch

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\det M}} \begin{pmatrix} 0 & -M_{34} & M_{24} & -M_{23} \\ M_{34} & 0 & -M_{14} & M_{13} \\ -M_{24} & M_{14} & 0 & -M_{12} \\ M_{23} & -M_{13} & M_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei M_{ij} die Matrixelemente von M sind.

(c) Wir betrachten Integrale im Raum der N Grassmann–Variablen $\eta_1, \ldots, \eta_N$. Wie verhält sich das Integrationsmaß bei einer linearen Variablentransformation

$$\eta_i = B_{ij}\eta_k \,?$$

Betrachten Sie zunächst nur $N = 2$ und machen dann eine sinnvolle Verallgemeinerung.

(d) Verwenden Sie das Ergebnis aus (c), um das komplexe, N–dimensionale Gauß–Integral

$$\int \mathrm{d}\bar{\eta}_N \cdots \mathrm{d}\bar{\eta}_1 \mathrm{d}\eta_N \cdots \mathrm{d}\eta_1 \, \mathrm{e}^{-\bar{\eta} B \eta}$$

zu berechnen (B hermitesch). Tasten Sie sich wiederum von $N = 1$ und $N = 2$ zu beliebigem N vor.