

SUPERSYMMETRIE AN COLLIDERN

SOMMERSEMESTER 2011

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

GEHALTEN VON

MILADA MARGARETE MÜHLEITNER

Hinweis:

Der Teil der VL mit den Kapiteln 1-5 orientiert sich sehr stark an dem Buch *Supersymmetrie* von H. Kalka und G. Soff.

Kapitel 6 orientiert sich sehr stark an dem Buch *Weak Scale Supersymmetry* von H. Baer und X. Tata.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitende Bemerkungen	3
1.1	Literatur	3
1.2	Kapitelübersicht	3
1.3	Abkürzungen	4
2	Motivation	5
2.1	Das Standardmodell und seine Unzulänglichkeiten	5
2.2	Das Hierarchieproblem	6
2.3	Weitere SUSY Antworten	10
3	Symmetrien, Algebren, Gruppen, Spinoren	13
3.1	Einleitung	13
3.2	Abstecher in die Mathematik	13
3.2.1	Grassmann Elemente und Variablen	13
3.2.2	Gruppen, Symmetrien	15
3.2.3	Algebra	15
3.2.4	Clifford-Algebren	16
3.2.5	Liealgebren	16
3.3	Auffrischung und Notationen	16
3.3.1	Die Lorentzgruppe und ihre Spinoren	16
3.3.2	Die Poincarégruppe	20
4	Supergruppen, SUSY-Teilchen	23
4.1	Das Coleman-Mandula Theorem	23
4.2	Die Graduierung	24
4.2.1	Graduierte Algebren	24
4.2.2	Graduierte Liealgebren	25
4.2.3	Duale und konjugierte Darstellungen	25
4.2.4	Gepunktete und ungepunktete Spinoren	26
4.2.5	Bilinearformen	28
4.2.6	Das Rechnen mit Weyl-Spinoren	29
4.2.7	Bispinoren	29
4.3	Die Poincaré-Superalgebra	30
4.3.1	Die SUSY-Generatoren als Bispinoren	30
4.3.2	Die SUSY-Generatoren als Weyl-Spinoren	31
4.3.3	Der supersymmetrische Grundzustand	31
4.3.4	Die Boson-Fermion-Regel	32

4.4	SUSY-Teilchen	33
4.5	Das chirale Supermultiplett	34
4.6	Das Vektor-Supermultiplett	34
4.7	Kovariante Ableitungen	35
5	Superfelder, Lagrangedichte	37
5.1	Das Superfeld	37
5.1.1	Die Komponenten des Superfeldes	37
5.1.2	Eingeschränkte Superfelder	38
5.2	Skalare Superfelder	38
5.2.1	Chirale Superfelder im komplexen Superraum	38
5.2.2	Chirale Superfelder im reellen Superraum	39
5.2.3	Produkte von chiralen Superfeldern	40
5.3	Das Vektor-Superfeld	40
5.3.1	Ansatz	40
5.3.2	SUSY Eichtransformation	41
5.3.3	Die Wess-Zumino Eichung	42
5.3.4	Die supersymmetrische Feldstärke	43
5.4	Supersymmetrische Lagrangedichten	44
5.4.1	Die Lagrangedichte für chirale Superfelder	45
5.4.2	Das Superpotential	45
5.4.3	Die Lagrangedichte ohne Hilfsfelder	46
5.4.4	Die Lagrangedichte für Vektor-Superfelder	47
5.4.5	Supersymmetrische Eichtheorie	49
5.4.6	Gesamte Lagrangedichte	52
5.4.7	Die Lagrangedichte ohne Hilfsfelder	53
5.4.8	Die Lagrangedichte in integraler Form	54
5.5	Die Brechung der Supersymmetrie	54
5.5.1	SUSY Brechungsmechanismen	56
6	Das MSSM	59
6.1	Die Lagrangedichte des MSSM	59
6.1.1	Die Parameter im MSSM	64
6.2	Das skalare Potential des MSSM und EWSB	64
6.3	Teilchenmassen im MSSM	67
6.3.1	Eichbosonen	67
6.3.2	Massive Fermionen	68
6.3.3	Higgsbosonen	68
6.3.4	Gluinos	72
6.3.5	Charginos und neutralinos	72
6.3.6	Squarks und Sleptonen	76
6.4	Wechselwirkungen im MSSM	78
6.4.1	Higgekopplungen	79
6.5	Strahlungskorrekturen zur Higgsbosonmasse	80

Kapitel 1

Einleitende Bemerkungen

1.1 Literatur

- H. Kalka und G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner Studienbücher 1997. (For notation, SUSY algebra etc.)
- Wess & Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press.
- H.P. Nilles, *Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics*, Phys. Rep. **110** (1984) 1.
- H.E. Haber and G.L. Kane, *The Search for Supersymmetry: Probing Physics beyond the Standard Model*, Phys. Rep. **117** (1985) 75.
- S. Martin, *A Supersymmetry Primer*, hep-ph/9709356.
- S. Dawson, *The MSSM and why it works*, hep-ph/9712464.
- S. Dawson, J.F. Gunion, H.E. Haber and G. Kane, *The Higgs Hunter's Guide*, Frontiers in Physics.
- M. Drees, R.M. Godbole and P. Roy, *Theory and Phenomenology of Sparticles*, World Scientific.
- H. Baer and X. Tata, *Weak Scale Supersymmetry*, Cambridge University Press.
- ATLAS TDR, CMS TDR, ILC TDR

1.2 Kapitelübersicht

- 1 Motivation, Probleme des SM
- 2 Einführung in Supersymmetrie
- 3 SUSY-GUT
- 4 SUSY-Brechungsmechanismen
- 5 Das MSSM

- 6 SUSY-Teilchen Produktion
- 7 MSSM Higgsbosonen
- 8 NMSSM
- 9 R-Parität
- 10 SUSY Dark Matter

1.3 Abkürzungen

- SM - Standardmodell
- DM - Dunkle Materie
- EWSB - Elektroschwache Symmetriebrechung (von *englisch*: Electroweak Symmetry Breaking)
- VeV - Vakuumerwartungswert (von *englisch*: vacuum expectation value)
- SUSY - Supersymmetrie (von *englisch*: Supersymmetry)
- MSSM - Minimale Supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells (von *englisch*: Minimal Supersymmetric Extension of the Standard Model)
- GUT - Große Vereinheitlichte Theorie (von *englisch*: Grand Unified Theory)
- FG - Freiheitsgrad(e)

Kapitel 2

Motivation

2.1 Das Standardmodell und seine Unzulänglichkeiten

Das Standardmodell (SM) der Teilchenphysik beschreibt die uns heute bekannten grundlegenden Strukturen der Materie und Kräfte. Allerdings mit Ausnahme der Gravitation. Es ist eine konsistente, renormierbare Quantenfeldtheorie, und beschreibt eine große Spanne experimenteller Daten über einen Energiebereich, der von Bruchteilen von eV bis etwa 100 GeV reicht, einem Bereich von über 12 Größenordnungen. Ursprünglich auf Bornniveau getestet, hat die bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen SM Voraussagen und den Präzisionsmessungen am CERN LEP Collider und anderen Experimenten das SM mindestens auf permille Niveau getestet. Und, was noch wichtiger ist, die Experimente haben etabliert, daß die Strahlungskorrekturen, wie sie vom SM gegeben werden, entscheidend für die Übereinstimmung mit diesen Daten sind. Dennoch ist das SM unvollständig. Einige Unzulänglichkeiten bzw. offene Fragen innerhalb des SM seien hier aufgelistet:

- Experimentelle Argumente:
 - Sonnen- und atmosphärische Neutrinodaten, interpretiert als Neutrinooszillationen weisen stark darauf hin, daß Neutrinos Masse haben.
 - Untersuchungen der Fluktuationen im Spektrum des Rest-Mikrowellen Hintergrundes vom Big Bang haben die Existenz kalter Dunkler Materie (DM) im Universum etabliert. Im SM existiert hierfür kein Kandidat.
 - Beobachtungen von Typ Ia Supernovae bei großer Rotverschiebung sowie der kosmischen Mikrowellen Hintergrundsstrahlung deuten darauf hin, daß der Großteil der Energie des Universums in einer neuen Form von Energie auftritt, der der Name “Dunkle Energie” gegeben wurde. Hierbei könnte es sich um die kosmologische Konstante handeln, die erstmals von Einstein eingeführt wurde, oder um etwas noch Merkwürdigeres.
 - Gravitation existiert, läßt sich aber im Rahmen des SM nicht beschreiben.
- Theoretische oder ästhetische Überlegungen:
 - Gibt es bei einer hohen Energieskala eine Vereinheitlichung der Kräfte, die im SM beschrieben werden (starke-schwache-elektromagnetische Kraft)?

- Wir verstehen die Teilchenmassen und Mischungsmuster nicht, die in einer großen Anzahl von Parametern des SM resultieren.
- Das Higgspotential und damit die spontane Symmetriebrechung der elektroschwachen Symmetrie wird per Hand zum SM hinzugefügt. Wir haben keine dynamische Erklärung für diesen Mechanismus.
- Wie kann die Higgsmasse vor dem Hintergrund der Gültigkeit des SM bis zu hohen Energien auf “natürliche” Weise, ohne Feinadjustierungen (*finetuning*) der Parameter klein, d.h. von der Ordnung der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung (EWSB), $v = 246$ GeV, gehalten werden? Das sogenannte *Hierarchieproblem*.

Im folgenden wollen wir einige dieser offenen Fragen und ihre Lösung innerhalb von Supersymmetrie (SUSY) genauer anschauen.

2.2 Das Hierarchieproblem

Schauen wir zunächst Strahlungskorrekturen zur Quantenelektrodynamik an, die durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu D^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

beschrieben wird. ψ bezeichnet den 4-komponentigen Spinor eines Diracfermions, γ_μ die Diracmatrizen, D_μ die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + iq_\psi A_\mu(x) , \quad (2.2)$$

mit dem Vektorpotential $A_\mu(x)$ und der Kopplungskonstanten q_ψ , welche mit der Ladung des Diracfeldes identifiziert wird. Der Feldstärkentensor $F_{\mu\nu}$, ausgedrückt durch das Vektorpotential A_μ , lautet

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (2.3)$$

Die Theorie beschreibt die Wechselwirkungen zwischen Fermionen und Photon. Diese Wechselwirkungen erhalten die Chiralität. (Siehe hierzu die Übung ?? im Kapitel ?? zu den Übungen.) D.h., ein linkshändiges Fermion bleibt linkshändig, wenn es ein Photon emittiert (oder absorbiert), ein rechtshändiges Fermion bleibt ein rechtshändiges. Der kinetische Term erhält auch die Chiralität. Da die Emission oder Absorption eines Photons die Chiralität des Fermions nicht ändern kann, hat dies unmittelbar zur Folge, daß jegliche Strahlungskorrektur zur Fermionmasse (welches ein Operator ist, der ψ_L und ψ_R verbindet) bis in alle Ordnungen der Störungstheorie verschwinden muß, wenn die Fermionmasse gleich null ist. Das heißt

$$\delta m \sim m . \quad (2.4)$$

Die Schleifenintegrale, die in die Berechnungen der Strahlungskorrekturen eingehen, sind divergent. Wenn wir die Divergenz durch einen Lorentz-invarianten Schnitt Λ regularisieren, so finden wir durch dimensionale Analyse, daß die Abhängigkeit vom Abschneideparameter durch

$$\delta m \sim m \ln \frac{\Lambda}{m} \quad (2.5)$$

gegeben sein muß. Naive dimensionale Analyse hätte hingegen $\delta m \sim \Lambda$ ergeben. Aufgrund der chiralen Symmetrie ist die tatsächliche Divergenz also milder. Die chirale Symmetrie schützt die Fermionmassen vor großen Strahlungskorrekturen. In analoger Weise schützt die Eichinvarianz das Photon davor, eine Masse zu erhalten. Tatsächlich ist in der Quantenelektrodynamik der Fermionen die führende Divergenz in *allen* Größen logarithmisch.

Die Struktur der Divergenz in Feldtheorien mit elementaren Skalaren ist jedoch sehr verschieden. Schauen wir die Strahlungskorrekturen zur skalaren Masse in einem Spielzeugmodell an, das durch die folgende Lagrangedichte beschrieben wird

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_F)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu S)^2 - \frac{1}{2}m_S^2 S^2 - \frac{\lambda_F}{2}\bar{\psi}\psi S, \quad (2.6)$$

wobei der Diracspinor ψ ein Fermion der Masse m_F beschreibt, S ein reelles skalares Feld der Masse m_S und die Kopplungsstärke zwischen dem Skalar S und zwei Fermionen durch die Kopplungskonstante λ_F beschrieben wird. Die Strahlungskorrekturen zu den Fermion- und skalaren Massen sind im Rahmen dieses Modells durch die Diagramme in Fig. 2.1 gegeben. In Abhängigkeit vom Abschneideparameter Λ erhalten wir für die Korrektur zur Fermionmasse δm_F und für die Korrektur zur skalaren Masse δm_S^2

$$\delta m_F = -\frac{3\lambda_F^2 m_F}{64\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m_F^2} + \dots \quad (2.7)$$

$$\delta m_S^2 = -\frac{\lambda_F^2}{8\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_F^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m_F^2} \right] + \dots \quad (2.8)$$

Während die Strahlungskorrektur zur Fermionmasse die oben diskutierte milde logarithmische Divergenz aufweist, ist die Korrektur zur skalaren Masse *quadratisch* divergent. Im

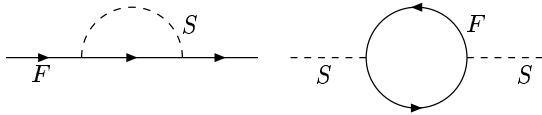


Abbildung 2.1: Strahlungskorrekturen zur Fermionmasse (links) und Bosonmasse (rechts).

Rahmen des SM gibt es weitere quadratisch divergente Beiträge zur skalaren Masse von Eichbosonschleifen sowie anderen Fermionschleifen.

Die quadratischen Divergenzen zur skalaren Masse, im Rahmen des SM die zur Higgsbosonmasse, sind prinzipiell kein Problem. Da das SM renormierbar ist, können wir die Strahlungskorrekturen bis zu beliebiger Genauigkeit ausarbeiten. Wo also ist das Problem? Schauen wir dazu die strahlungskorrigierte physikalische Higgsbosonmasse auf 1-Schleifenniveau an,

$$m_{H_{SM}}^2(\text{phys}) \approx m_{H_{SM}}^2 + \frac{c}{16\pi^2} \Lambda^2, \quad (2.9)$$

wobei $m_{H_{SM}}^2$ die quadratische Higgsmasse ist, die in der Lagrangedichte auftritt und der zweite Term die quadratische divergente Korrektur zur Higgsmasse bezeichnet. Die Terme logarithmisch in Λ wurden hier der Einfachheit halber vernachlässigt. Der Koeffizient c hängt

von den diversen Kopplungskonstanten des SM ab. In Gleichung 2.9 wurde nur über den Energie-Impulsbereich integriert, von dem erwartet wird, daß das SM hierin eine vernünftige Beschreibung liefert. Der Abschneideparameter Λ charakterisiert also die Energieskala, bis zu der das SM gültig ist. Die Skala Λ kann von der Größenordnung lediglich einiger TeV sein, sicher aber nicht höher als die reduzierte Planckskala $M_P \approx 2.4 \times 10^{18}$ GeV, wo erwartet wird, daß Quantengravitationskorrekturen wichtig werden.

Woher wissen wir, welche Werte von Λ vernünftig sind? Die Forderung nach *störungstheoretischer Unitarität* impliziert, daß die physikalische Higgsmasse $m_{H_{SM}}(\text{phys})$ kleiner als einige 100 GeV sein muß. Wenn wir nun fordern, daß Glg. (2.9) ohne übertriebene Feinadjustierung zwischen den beiden Termen der rechten Seite erfüllt ist, würden wir $\Lambda \leq \mathcal{O}(\text{TeV})$ ableiten. Diese Schlußfolgerung ergibt sich allein aus der Forderung nach keiner Feinadjustierung, aber nicht aus einer logischen Inkonsistenz des SM. Im SM kann die nötige Feinadjustierung unglaublich groß werden. Wird beispielsweise angenommen, daß das SM als effektive Niederenergie bis zur Skala der Großen Vereinheitlichung (GUT) gültig ist, und wir also $\Lambda = M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV wählen, dann muß der Massenparameter der Lagrangedichte $m_{H_{SM}}^2$ bis zu 1 Teil in 10^{26} adjustiert werden, um die nötige Kanzellierung zu ermöglichen, welche die physikalische Higgsbosonmasse kleiner als von der Unitarität geforderte Grenze hält. Der logarithmische Term hingegen trägt eine Korrektur bei, die $\sim m_{H_{SM}}^2$ ist, sogar für $\Lambda \sim M_P$. Die $\ln \Lambda$ -Korrekturen, die auch in den Fermionmassen-Korrekturen auftreten, sind also nicht groß. Anders gesagt bedeutet dies, daß die großen Λ^2 Korrekturen implizieren, daß, wenn wir die Hochenergiethorie, von der das SM als effektive Niederenergiethorie abstammt, benützen, um Vorhersagen bei TeV Energien zu machen, diese Vorhersagen extrem sensitiv auf die Parameter der Hochenergiethorie sein würden, wenn $\Lambda \gg 1$ TeV. Dies ist das sogenannte *fine-tuning problem* (“Feinadjustierungsproblem”) des SM.

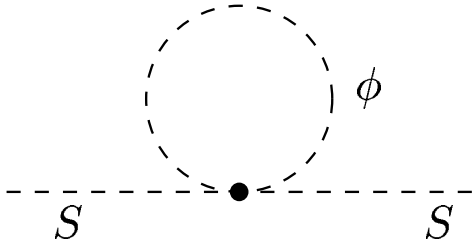


Abbildung 2.2: Strahlungskorrekturen zur und Bosonmasse des Teilchens S aufgrund der Felder ϕ_1 und ϕ_2 .

Auf welche Weise trägt nun Supersymmetrie zur Lösung dieses Problems bei? Um dies zu sehen, fügen wir zu unserer Spielzeuglagrangedichte (2.6) eine weitere Lagrangedichte $\mathcal{L}_2$ hinzu,

$$\mathcal{L}_2 = |\partial_\mu \phi_1|^2 + |\partial_\mu \phi_2|^2 + \frac{\lambda_S}{2} S^2 (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) - m_\phi^2 (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) . \quad (2.10)$$

Die Felder ϕ_1, ϕ_2 beschreiben komplexe skalare Teilchen der Masse m_ϕ , die mit dem skalaren Feld mit der Kopplungsstärke λ_S wechselwirken. Diese neuen Teilchen tragen nun ebenfalls zu den Strahlungskorrekturen der skalaren Masse von S bei. Das entsprechende Diagramm

ist in Figur 2.2 dargestellt. Die Berechnung der Strahlungskorrektur $\delta m_S'^2$ zur Masse von S , die von den Schleifen mit ϕ_1, ϕ_2 herrührt, liefert

$$\delta m_S'^2 = +\frac{\lambda_S^2}{8\pi^2}[\Lambda^2 - m_\phi^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m_\phi^2}] + \dots \quad (2.11)$$

Wenn $\lambda_S = \lambda_F$, dann ist dieser Beitrag in dem in Λ quadratisch divergenten Term exakt gleich dem Beitrag, den das Fermion zur Massenkorrektur liefert, mit der Ausnahme, daß das Vorzeichen umgekehrt ist. Dieser Beitrag zankelliert also exakt den in Λ quadratisch divergenten problematischen Term zur Higgsmassen-Strahlungskorrektur, so daß das Hierarchieproblem oder anders gesagt das Problem der Feinadjustierung der Parameter sich nicht mehr stellt. Das umgekehrte Vorzeichen in den Beiträgen der Fermion- und Bosonschleifen ist ein Konsequenz des Pauli-Prinzips ($\rightarrow$ “Geschlossene Fermionschleifen erhalten einen Faktor -1 .”) Damit diese Kankzellierung stattfindet, ist folgendes nötig:

- Die Anzahl der Freiheitsgrade muß übereinstimmen. Da es vier fermionische Freiheitsgrade gibt (linkshändiger und rechtshändiger Fermionspinor), müssen wir zwei komplexe skalare Felder einführen.
- Die Kopplungen der neuen Teilchen ϕ_1, ϕ_2 an das skalare Feld müssen exakt gleich der Kopplung des Fermions an das skalare Feld sein,

$$\lambda_F = \lambda_S \equiv \lambda \quad (2.12)$$

Die verbleibende logarithmische Divergenz

$$\delta m_S^2 \sim \frac{\lambda^2}{8\pi^2}(m_F^2 - m_\phi^2) \ln \Lambda^2 \quad (2.13)$$

stellt für die Feinadjustierung kein Problem dar, wenn m_ϕ nicht zu groß ist.

Supersymmetrie gewährleistet dies, indem sie Fermionen und Bosonen ineinander in Beziehung setzt. Die fermionischen Teilchen des SM erhalten in der SUSY Theorie bosonische Partner und bosonische Teilchen fermionische. Auf diese Weise können bosonische Massen klein gehalten werden.

Supersymmetrie: Bosonische Massen können auf natürliche Weise klein gehalten werden, wenn Bosonen und Fermionen ineinander in Beziehung gesetzt werden.

Um durch die Einführung der neuen Felder und deren Masse nicht wieder zusätzliche Feinadjustierung einzuführen, fordern wir zusätzlich, daß die Masse dieser neuen supersymmetrischen Partner des Fermions maximal von der Ordnung TeV sind, $m_\phi \lesssim \mathcal{O}(1 \text{ TeV})$ (siehe Gleichung 2.13). Damit können wir also die Eigenschaften der Nieder-Energie SUSY-Theorie zusammenfassen:

- Verdopplung des Teilchenspektrums (in der minimalen Version der supersymmetrischen Erweiterung des SM).
- Gleichheit der fermionischen und bosonischen Kopplungskonstanten.
- $m_{SM} \sim \mathcal{O}(100 \text{ GeV}) \Rightarrow m_\phi \equiv \tilde{m} \lesssim \mathcal{O}(1 \text{ TeV})$.

2.3 Weitere SUSY Antworten

In diesem Abschnitt sollen weitere Antworten auf die oben aufgeworfenen Fragen bzw. Unzulänglichkeiten des SM diskutiert werden, die eine supersymmetrische Erweiterung des SM liefern kann.

(i) Generierung des Higgsmechanismus durch Strahlungskorrekturen

Während es im Rahmen des SM keine Erklärung dafür gibt, weshalb das Higgspotential einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert (VEV) hat oder anders gesagt, weshalb es die typische Minimaxform aufweisen sollte, die verantwortlich ist für die Generierung der Eichbosonmassen, ohne Eichinvarianz zu verletzen, so wird im Rahmen von SUSY-GUT Theorien das negative Massenquadrat des typischen Minimax-Higgspotentials durch Strahlungskorrekturen generiert, falls die Top-Quark-Masse in der richtigen Größenordnung liegt, $m_t \sim \mathcal{O}(100\text{-}200 \text{ GeV})$. Wir werden später hierauf nochmals zurückkommen.

(ii) Vereinigung der schwachen-elektromagnetischen-starken Kopplungskonstanten

Das Laufen der Kopplungskonstanten des SM, welches auf der $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ lokalen Eichsymmetrie beruht, wird durch die sogenannten Renormierungsgruppengleichungen beschrieben. Für die 3 Eichkopplungen α_i der $U(1)_Y, SU(2)_L, SU(3)_C$ Eichgruppen sind sie von der Struktur

$$\frac{1}{\alpha_i(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_i} - \frac{b_i}{2\pi} \ln Q^2 \quad \text{für } i = U(1)_Y, SU(2)_L, SU(3)_C. \quad (2.14)$$

Die Koeffizienten b_i sind für die jeweiligen Kopplungen verschieden und werden durch die höheren Strahlungskorrekturen berechnet. Innerhalb des SM ergibt sich hierbei, daß sich die Kopplungen nicht in einem einzigen Punkt treffen. Im Rahmen der Minimalen Supersymmetrischen Erweiterung des SM (MSSM) ist eine Vereinigung der Kopplungskonstanten gegeben. Diese hängt lediglich von den Quantenzahlen, nicht aber von den Details des Teilchenspektrums jenseits von $\sim 1 \text{ TeV}$ ab. (Siehe Abb. 2.3.)

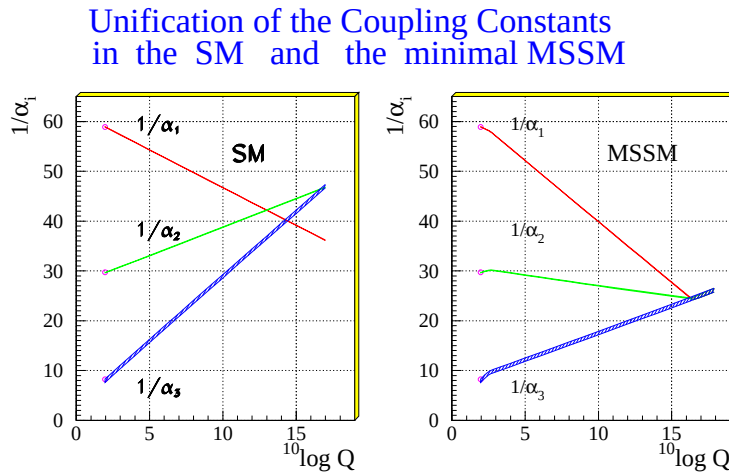


Abbildung 2.3: Vereinigung der Kopplungskonstanten im SM und im MSSM. Ref. [?].

(iii) Kalte Dunkle Materie

Im Rahmen des SM gibt es keinen Kandidaten für die Kalte Dunkle Materie. SUSY, ausgestattet mit R -Parität, liefert mögliche Kandidaten für die Dunkle Materie. R -Parität ist eine multiplikative Quantenzahl mit Wert $+1$ für SM-Teilchen und Wert -1 für SUSY Teilchen. Die Konsequenz der geforderten Erhaltung von R -Parität ist, daß SUSY-Teilchen in Kollisionen von SM Teilchen paarweise erzeugt werden. Sowie daß das leichteste supersymmetrische Teilchen stabil ist und nicht weiter zerfallen kann. SUSY liefert hiermit einen Kandidaten für Kalte Dunkle Materie ab.

(iv) Lokale SUSY erzwingt Gravitation

In der elektromagnetischen Theorie hat die Forderung nach lokaler Eichinvarianz die Existenz eines masselosen Spin-1 Teilchens, des Photons, zur Folge. Auf ähnliche Weise führt die Forderung nach lokaler SUSY-Eichinvarianz zur Existenz eines masselosen Spin-2 Teilchens, des Gravitons. Diese Theorie ist zwar nicht renormierbar, gibt aber möglicherweise einen Hinweis darauf, wie Gravitation mit der Beschreibung der übrigen Wechselwirkungen vereinigt werden kann. Wiederbelebt wurde diese Idee mit dem Aufkommen und den Fortschritten auf dem Gebiet von Superstring-Theorien. Für mehr Details siehe beispielsweise Ref. [?], Kapitel 3.

Kapitel 3

Symmetrien, Algebren, Gruppen, Spinoren

3.1 Einleitung

Warum betrachtet man Symmetrien?

Symmetrien erlauben eine übersichtliche mathematische Formulierung.

Schränken die Dynamik eines Systems stark ein $\leadsto$ Vereinfachung der Lösung der Bewegungsgleichungen (Lösung des Kepler-Problems mithilfe der Erhaltungssätze von Energie und Drehimpuls)

Welche Arten von Symmetrien?

Diskrete Symmetrietransformationen (Raumspiegelung, Zeitumkehr, Ladungskonjugation)

Kontinuierliche Symmetrietransformationen (Lorentz-Transformation)

Genereller Zusammenhang

$$\boxed{\text{Symmetrie} - \text{Erhaltungssatz} - \text{Entartung}}$$

Jede Symmetrie führt zu Entartung, d.h. zu einem Eigenwert gehören zwei oder mehrere Zustände, die ein Multiplett bilden. Beispiel Supersymmetrie mit Multipletts gleicher Masse (bzw. Energie).

SUSY-Transformationen werden in der QM durch einen SUSY Operator Q vermittelt

$$\boxed{Q|\text{Boson} \rangle \sim |\text{Fermion} \rangle \quad Q|\text{Fermion} \rangle \sim |\text{Boson} \rangle}$$

Bei jeder Transformation, welche die Q 's vermitteln, bleibt die Energie des Systems erhalten.
 $\leadsto [H_S, Q_{1,2}] = 0.$

3.2 Abstecher in die Mathematik

3.2.1 Grassmann Elemente und Variablen

Da Grassmann Variablen die neuen Koordinaten im Superraum bilden werden, die wir brauchen, um Supersymmetrie zu formulieren, lernen wir hier die Grundlagen der Grassmann

Elemente und Variablen kennen. Wir postulieren antikommutierende Grassmann Elemente ϵ_i (i von 1, .. n) mit einem Produkt so, dass

$$\epsilon_i \epsilon_j = -\epsilon_j \epsilon_i . \quad (3.1)$$

Insbesondere

$$\epsilon_i^2 = 0 . \quad (3.2)$$

Wir weiten dieses Konzept auf antikommutierende Variablen θ aus. Seien $\theta, \bar{\theta}$ konjugierte antikommutierende Variablen mit

$$\theta \bar{\theta} + \bar{\theta} \theta = 0 , \quad \theta^2 = 0 = \bar{\theta}^2 , \quad \bar{\bar{\theta}} = \theta . \quad (3.3)$$

Diese erzeugen eine Grassmann Algebra. Analytische Funktionen vom Typ $f(\theta) = f_0 + f_1 \theta$, wobei f_0, f_1 beliebige komplexe Zahlen sind, bilden einen zweidimensionalen Raum. In diesem Raum ist die Ableitung bezüglich θ definiert durch

$$\frac{d}{d\theta} f(\theta) = f_1 . \quad (3.4)$$

Auf gleiche Weise erzeugen die Funktionen $\bar{f}(\bar{\theta}) = \bar{f}_0 + \bar{f}_1 \bar{\theta}$ einen anderen zweidimensionalen Raum, in dem

$$\frac{d}{d\bar{\theta}} \bar{f}(\bar{\theta}) = \bar{f}_1 . \quad (3.5)$$

Eine allgemeine Funktion $f(\theta, \bar{\theta})$ dieser Variablen ist Element der Grassmann-Algebra und hat die Form

$$f(\theta, \bar{\theta}) = f_0 + f_1 \theta + \bar{f}_2 \bar{\theta} + f_3 \theta \bar{\theta} , \quad (3.6)$$

wobei $f_0, f_1, \bar{f}_2, f_3$ komplexe Zahlen sind. Seien $d\theta$ und $d\bar{\theta}$ antikommutierende Variablen, dann haben wir unter Verwendung der Berezin Integration

$$1 = \int d\theta \theta = \int d\bar{\theta} \bar{\theta} , \quad (3.7)$$

$$0 = \int d\theta = \int d\bar{\theta} = \int d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \bar{\theta}) = \int d\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} f(\theta, \bar{\theta}) . \quad (3.8)$$

Die Grassmann Integration ist linear,

$$\int d\theta [\alpha f(\theta) + \beta g(\theta)] = \alpha \int d\theta f(\theta) + \beta \int d\theta g(\theta) \quad (3.9)$$

wobei α, β komplexe Zahlen sind. Analog für die $\bar{\theta}$ -Integration. Ferner gilt Translationsinvarianz,

$$\int d\theta_i f(\theta_i + \theta_j) = \int d\theta_i f(\theta_i) , \quad (3.10)$$

wo θ_i, θ_j antikommutierende Variablen sind, mit

$$\int d\theta_i \theta_j = \delta_{ij} . \quad (3.11)$$

Analog für $\bar{\theta}$. Ferner haben wir

$$\int d\theta d\bar{\theta} e^{-\theta \bar{\theta}} = 1 . \quad (3.12)$$

3.2.2 Gruppen, Symmetrien

Sei ein Paar $(G, *)$ mit einer Menge G und einer inneren zweistelligen Verknüpfung/Gruppenmultiplikation. $*$: $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto a * b$ heißt Gruppe, wenn folgende Axiome erfüllt sind

1. Die Gruppe ist *abgeschlossen*. D.h. wenn $g, h \in G \Rightarrow g * h \in G$.
2. *Assoziativität*: $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$.
3. $\exists$ *Einselement* e mit der Eigenschaft $g * e = e * g = g \quad \forall g \in G$.
4. Zu jedem g gibt es ein *Inverses* g^{-1} mit $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

Abelsche Gruppe: Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn $g * h = h * g$.

Kontinuierliche Gruppen: Sie besitzen unendlich viele Elemente und werden durch n Parameter beschrieben. Bei *Liegruppen* ist n endlich. Alle einparametrischen Liegruppen sind abelsch. Typisches Beispiel: $U(1)$ mit den Elementen $e^{i\phi}$ und ϕ als Parameter.

3.2.3 Algebra

Ein linearer Raum (Vektorraum) wird zu einer *Algebra* $\mathbf{A}$, wenn eine binäre Operation (Multiplikation) zweier Elemente m, n existiert, so daß $mn \in \mathbf{A}$. Es gelten die Linearitätsbeziehungen ($k, m, n \in \mathbf{A}$)

$$\begin{aligned} k(c_1 m + c_2 n) &= c_1 km + c_2 kn \\ (c_1 m + c_2 n)k &= c_1 mk + c_2 nk \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dabei sind c_1, c_2 reelle (komplexe) Zahlen. Man spricht je nach Fall von reeller (komplexer) Algebra.

Eine Algebra heißt *kommutativ*, wenn

$$mn = nm \quad (3.14)$$

Sie heißt *assoziativ*, wenn

$$k(mn) = (km)n \quad (3.15)$$

Sie heißt *Algebra mit Einselement*, wenn sie ein Einselement $\mathbf{1}$ besitzt mit

$$\mathbf{1}m = m\mathbf{1} = m \quad (3.16)$$

Sei $\mathbf{A}$ eine *assoziative* Algebra mit Einselement und $B \subset \mathbf{A}$ eine Menge von Elementen b^1, b^2 etc. Die Algebra heißt von B *erzeugt*, wenn jedes $m \in \mathbf{A}$ durch ein Polynom endlichen Grades in den Elementen b^i geschrieben werden kann,

$$m = c\mathbf{1} + \sum_{k=1}^p \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} c_{i_1 i_2 \dots i_k} b^{i_1} b^{i_2} \dots b^{i_k}, \quad (3.17)$$

wobei die Koeffizienten $c_{i_1 i_2 \dots i_k}$ komplexe Zahlen sind. Die Elemente der Menge B heißen *Generatoren* von $\mathbf{A}$. Das Einselement gehört nicht zu den Generatoren.

3.2.4 Clifford-Algebren

Eine Clifford-Algebra C_N wird von N Generatoren $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N$ erzeugt, für die

$$\xi^a \xi^b + \xi^b \xi^a = 2\delta^{ab}$$

mit $a, b = 1, \dots, N$.

Die Dimension der Clifford-Algebra C_N ist 2^N . Es existiert ein enger Zusammenhang zwischen Clifford-Algebren und den Quantisierungsbedingungen für Fermionen.

Im allgemeinen lassen sich Clifford-Algebren für beliebige *symmetrische* Metriken g^{mn} definieren. So gilt insbesondere für die pseudoeuklidische Metrik

$$g_{ab} = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_N, \underbrace{-1, \dots, -1}_M), \quad (3.18)$$

$$\text{Clifford-Algebra } C_{N,M}: \{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2g^{mn}\mathbf{1}.$$

Die Anzahl der Generatoren ist $d = N + M$.

3.2.5 Liealgebren

Eine Algebra ist ein Vektorraum, der von den Generatoren $A, B, C, \dots$ aufgespannt wird: beliebige Linearkombinationen von Generatoren ergeben wieder Generatoren. Eine Algebra verfügt über ein *Produkt* zwischen den Generatoren. Im Fall der Liealgebra ist das Produkt der Kommutator

$$A \circ B := [A, B], \quad (3.19)$$

mit den folgenden Eigenschaften

$$A \circ B = -B \circ A \quad (3.20)$$

$$(A \circ B) \circ C + (C \circ A) \circ B + (B \circ C) \circ A = 0. \quad (3.21)$$

Liealgebren sind nicht assoziativ. Die Beziehung (3.21) heißt *Jacobi-Identität*.

3.3 Auffrischung und Notationen

In diesem Abschnitt soll bereits aus vorigen Vorlesungen Bekanntes wieder aufgefrischt werden und dabei auch die in dieser Vorlesung verwendete Notation eingeführt werden. Hier steht Knappheit im Vordergrund, auf Herleitungen wird verzichtet. Der interessierte Leser sei auf die einschlägige Literatur verwiesen.

3.3.1 Die Lorentzgruppe und ihre Spinoren

Ein Punkt in der Raum-Zeit (Minkowskigruppe) wird durch den Vierervektor

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x^i) = (ct, \vec{x}) \quad (3.22)$$

beschrieben. Die griechischen (lateinischen) Indizes laufen von 0 bis 3 (1 bis 3). Über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Die Lorentztransformation

Postulate der speziellen Relativitätstheorie:

- Die Lichtgeschwindigkeit c ist in allen Inertialsystemen gleich.
- Die fundamentalen Gleichungen der Physik besitzen in allen Inertialsystemen die gleiche Form (Kovarianzprinzip).

Aus dem 1. Postulat folgt für einen Lichtstrahl in zwei verschiedenen Inertialsystemen x^μ und x'^μ

$$s^2 := c^2 t^2 - \vec{x}^2 = c^2 t'^2 - \vec{x}'^2 . \quad (3.23)$$

Mit der Lorentz-Metrik

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = g^{\mu\nu} \quad (3.24)$$

läßt sich diese Gleichung als Skalarprodukt schreiben

$$x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \text{invariant} . \quad (3.25)$$

Alle linearen Koordinatentransformationen im Minkowskiraum

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu , \quad (3.26)$$

die dieses Skalarprodukt invariant lassen, heißen *Lorentztransformationen*. Sie bilden die Lorentzgruppe. Der Zusammenhang zwischen Gruppenelement und Metrik ist

$$\Lambda^T g \Lambda = g . \quad (3.27)$$

Wir haben die kontra- und kovarianten Vierervektoren

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \quad \text{und} \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x}) . \quad (3.28)$$

Alle Objekte, die sich wie x^μ transformieren, heißen Vierervektoren. Die relativistische Form des Gradienten ist

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \vec{\nabla} \right) \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad i = 1, 2, 3 . \quad (3.29)$$

Weyl-Spinoren

Die spezielle Lorentzgruppe

$$L_+^\uparrow = \{ \Lambda \in O(1, 3) \mid \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 > 0 \} \quad (3.30)$$

entspricht der $SO(1, 3)$ mit der zusätzlichen Einschränkung, daß Λ^0_0 positiv sein soll. Die vierdimensionale Darstellung ist gegeben durch

$$\Lambda = \exp \left(- \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right) \quad (3.31)$$

mit den sechs Generatoren

$$(M^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i(g^{\mu\rho} \delta^\nu_\sigma - g^{\nu\rho} \delta^\mu_\sigma) \quad (3.32)$$

und den Parametern $\omega_{\mu\nu}$, die durch die Drehwinkel φ^k und die drei Parameter ν^i gegeben sind, welche Lorentzboosts in Richtungen der drei Raumachsen beschreiben:

$$\begin{aligned}\omega^{ij} &= \epsilon^{ijk}\varphi^k, & i, j, k &= 1, 2, 3 \\ \omega^{0i} &= \nu^i = -\omega^{i0}, & \text{wobei } \nu^i &= \frac{v^i}{v} \operatorname{artanh} \left| \frac{v^i}{c} \right|.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Der Vektor $\vec{\nu} = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$ heißt Rapidity und zeigt immer in die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit. Bei ϵ^{ijk} handelt es sich um den total antisymmetrischen Tensor mit $\epsilon^{123} = +1$.

Die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ist die Menge aller komplexen 2×2 Matrizen A mit der Determinante 1; alle Gruppenelemente sind invertierbar. Im Unterschied zur $\mathrm{SU}(2)$ sind dies Matrizen *nicht* mehr unitär. Weyl-Spinoren sind $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -Spinoren, sie transformieren sich *nicht* unitär. Aus Weyl-Spinoren werden alle anderen Spinoren der Quantenfeldtheorie aufgebaut.

Die zweikomponentigen Spinoren ψ_L und ψ_R bezeichnet man als links- und rechtshändige Weyl-Spinoren. Sie transformieren sich gemäß

$$\psi'_L = A_L \psi_L \quad \text{und} \quad \psi'_R = A_R \psi_R. \quad (3.34)$$

Bei A_L und A_R handelt es sich um die linke und die rechte Fundamentaldarstellung der speziellen Lorentzgruppe,

$$A_L := \Lambda^{(\frac{1}{2}, 0)} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\vec{\varphi} - i\vec{\nu}) \cdot \vec{\sigma} \right\} \quad (3.35)$$

$$A_R := \Lambda^{(0, \frac{1}{2})} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\vec{\varphi} + i\vec{\nu}) \cdot \vec{\sigma} \right\}, \quad (3.36)$$

wobei $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Wir haben

$$\psi_R = -i\sigma^2 \psi_L^* \quad \text{und} \quad \psi_L = i\sigma^2 \psi_R^*. \quad (3.38)$$

Dirac-Spinoren, Dirac-Matrizen

Durch Bildung der direkten Summe $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ aus den Fundamentaldarstellungen gelangt man zu einem Bispinor mit insgesamt vier Spinorkomponenten.

Der Dirac-Spinor ist ein Bispinor mit vier komplexen Einträgen, also acht reellen Parametern. Er besteht aus einem links- und einem rechtshändigen Spinor,

$$\text{Dirac-Spinor:} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Die gewählte Darstellung ist die chirale Darstellung. Der Majorana-Spinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

ist ein Spezialfall eines Bispinors. Er besitzt nur die Hälfte der Freiheitsgrade eines Dirac-Spinors.

Die Projektionsoperatoren

$$P_L = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5) \quad \text{und} \quad P_R = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5) \quad (3.41)$$

mit der Matrix

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

filtern aus einem Dirac-Spinor den linken und den rechten Weyl-Spinor heraus. *Man beachte, dass die Gamma-Matrizen hier in der Weyl-Darstellung angegeben sind!* Dirac-Spinoren transformieren sich gemäß

$$\Psi \rightarrow \Psi' = S\Psi, \quad (3.43)$$

mit

$$S := \Lambda^{(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} A_L & 0 \\ 0 & A_R \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Der konjugierte Dirac-Spinor ist definiert durch

$$\underline{\text{konjugierter Dirac-Spinor :}} \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0 = (\phi_R^\dagger, \psi_L^\dagger), \quad (3.45)$$

mit der γ -Matrix

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Wir können damit folgenden Lorentzskalar konstruieren

$$\bar{\Psi}\Psi = \phi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \phi_R. \quad (3.47)$$

Die Γ -Matrizen in der chiralen Darstellung sind gegeben durch

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

mit

$$\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \vec{\sigma}) \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\vec{\sigma}). \quad (3.49)$$

Die γ -Matrizen bilden eine

$$\text{Clifford-Algebra:} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (3.50)$$

Die geschweiften Klammern bezeichnen den Antikommutator. Der Generator der vierdimensionalen Spinordarstellung ist gegeben durch

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3.51)$$

Die γ -Matrizen sind nicht hermitesch,

$$\gamma^{\mu\dagger} \neq \gamma^\mu . \quad (3.52)$$

Wir haben

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (3.53)$$

und

$$i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5 = \gamma_5 . \quad (3.54)$$

Die γ_5 -Matrix ist in Eq. (3.42) gegeben. Weitere Eigenschaften der γ_5 -Matrix sind

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_5^2 = \mathbf{1} . \quad (3.55)$$

Schließlich definieren wir noch den Feynmandolch

$$\not{x} = x^\mu \gamma_\mu . \quad (3.56)$$

3.3.2 Die Poincarégruppe

Tensoren oder (relativistische) Bosonen transformieren sich nach der *Tensordarstellung* der Lorentzgruppe; Spinoren oder (relativistische) Fermionen transformieren sich nach der *Spinordarstellung* der Lorentzgruppe. Die Lorentzgruppe ermöglicht also, zwischen Bosonen und Fermionen zu unterscheiden und alle Teilchen einer dieser beiden Kategorien zuzuordnen. Um die Welt der Elementarteilchen zu behandeln benötigen wir aber auch noch die Poincarégruppe.

Die Poincarégruppe beschreibt die Struktur unserer Raum-Zeit. Sie ist die Gruppe der Lorentztransformationen und der Verschiebungen im Minkowskiraum. Ihre irreduziblen Darstellungen sind gekennzeichnet durch die fundamentalen Eigenschaften der Elementarteilchen, durch *Masse* und *Spin*.

Poincarétransformationen

Poincarétransformationen im Minkowskiraum setzen sich aus Lorentztransformationen Λ^μ_ν und einer Verschiebung a^μ zusammen

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu . \quad (3.57)$$

Poincarétransformationen bilden die Poincarégruppe $\mathcal{P}$. Wir bezeichnen im folgenden ein Element von $\mathcal{P}$ mit (Λ, a) . Es gilt die Multiplikationsregel

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) . \quad (3.58)$$

Das Einselement von $\mathcal{P}$ ist $(\mathbf{1}, 0)$; das inverse Element ist

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) . \quad (3.59)$$

Die Liealgebra der Poincarégruppe

Die Liealgebra der Poincarégruppe, kurz Poincaréalgebra, wird von 10 Generatoren aufgespannt, den 6 Generatoren der Lorentzgruppe $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ und den 4 Generatoren der Translationsgruppe P^μ . Eine Darstellung der Poincarégruppe ist also gegeben durch

$$(\Lambda, a) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma} - i a_\mu P^\mu \right\} . \quad (3.60)$$

Die Liealgebra der Poincarégruppe besteht aus den Kommutatoren:

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho) \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -i(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Kapitel 4

Supergruppen, SUSY-Teilchen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Poincaré-Superalgebra und den daraus folgenden Supermultipletts.

4.1 Das Coleman-Mandula Theorem

Das Coleman-Mandula Theorem ist ein sogenanntes no-go Theorem. Es besagt, daß das maximale Set für Symmetrietransformationen, die die Raum-Zeitkoordinaten betreffen, die Shifts, Rotationen und Lorentztransformationen sind. Oder anders gesagt: Die allgemeinste Liealgebra der Symmetrien der S -Matrix enthält den Energie-Impuls-Tensor P^μ , die Generatoren der Lorentz-Rotation $M^{\mu\nu}$ und eine endliche Anzahl von Lorentz-skalaren Operatoren B . Letztere müssen der Liealgebra einer kompakten Liegruppe angehören.

Das Theorem beruht auf folgenden Annahmen:

- (1) Die S -Matrix beruht auf einer lokalen, relativistischen Quantenfeldtheorie in der vierdimensionalen Raum-Zeit.
- (2) Es gibt nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Teilchen, die mit einem Einteilchenzustand gegebener Masse assoziiert werden.
- (3) Es gibt eine Energielücke zwischen dem Vakuum und 1-Teilchenzuständen.

Supersymmetrien umgehen die Einschränkungen des Coleman-Mandula Theorems, indem sie eine Bedingung lockern. Sie verallgemeinern den Begriff der Lie-Algebra derart, indem sie algebraische Systeme miteinschließen, deren definierende Relationen sowohl Kommutatoren als auch Antikommutatoren enthalten. Diese neuen Algebren heißen Superalgebren oder Graduierte Liealgebren.

Das Theorem von Haag, Sohnius und Lopuszanski besagt dann folgendes: Die Supersymmetrie-Algebra (welche wir im folgenden kennenlernen werden) ist die einzige graduierte Liealgebra von Symmetrien der S -Matrix, die konsistent mit der relativistischen Quantenfeldtheorie ist.

Man glaubt daher, abgesehen davon, daß Supersymmetrie allein schon faszinierend ist, das Supersymmetrie eine fundamentale Rolle in der Teilchenphysik spielt.

Anmerkung zum Coleman-Mandula Theorem: Es besagt, daß bosonische Operatoren die Poincaré-Algebra nicht erweitern können. Betrachten wir zunächst den Energie-Impuls-Vier-

ervektor P^μ . Dann haben wir für einen Streuprozess von 2 Teilchen 1, 2 in den Endzustand $1', 2'$ unter Berücksichtigung der Erhaltung von P^μ

$$\langle 1, 2 | P_\mu | 1', 2' \rangle = p_{1\mu} + p_{2\mu} = p'_{1\mu} + p'_{2\mu} . \quad (4.1)$$

Die Teilchen werden back-to-back gestreut. Sei nun ein Operator $T_{\mu\nu} = \alpha p_\mu p_\nu + \beta g_{\mu\nu}$ ebenfalls erhalten, so folgt für den Streuprozess

$$\begin{aligned} \langle 1, 2 | T_{\mu\nu} | 1', 2' \rangle &= p_{1\mu} p_{1\nu} + p_{2\mu} p_{2\nu} \\ &= p'_{1\mu} p'_{1\nu} + p'_{2\mu} p'_{2\nu} \quad (\beta \text{ wurde gleich null gesetzt.}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wir haben somit also einzige Lösung eine Streuung bei Streuwinkel $\theta = 0$. Fermionische Operatoren hingegen können die Poincaré-Algebra erweitern. Welcher Art können sie sein? Erweitern wir die Liealgebra um einen fermionischen Operator Q , der erhalten ist. Damit ist (H bezeichnet den Hamilton-Operator)

$$[Q_i, H] = 0 \Rightarrow [\{Q_i, Q_j\}, H] = 0 . \quad (4.3)$$

Wenn Q_i ein Spin- $\frac{1}{2}$ Objekt ist, so ist $\{Q_i, Q_j\}$ ein Spin-1 Objekt $\sim P_\mu$ und damit gemäß Coleman-Mandula möglich. Wenn aber Q_i ein Spin- $\frac{3}{2}$ Objekt ist, so ist $\{Q_i, Q_j\}$ ein Spin-3 Objekt. Gemäß Coleman-Mandula kann dieses Objekt die Poincaré-Algebra nicht erweitern.

4.2 Die Graduierung

Der mathematische Begriff der Graduierung entspricht in der Physik dem Konzept der Supersymmetrie.

4.2.1 Graduierte Algebren

Die einfachste Form einer *graduierten Algebra*, die sogenannte $\mathbf{Z}_2$ graduierte Algebra, besteht aus einem Vektorraum $\mathbf{L}$, der eine direkte Summe aus zwei Unterräumen ist,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 \oplus \mathbf{L}_1 , \quad (4.4)$$

und einem Produkt $\circ$ mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} u_1 \circ u_2 &\in \mathbf{L}_0 & \forall u_1, u_2 \in \mathbf{L}_0 , \\ u \circ v &\in \mathbf{L}_1 & \forall u \in \mathbf{L}_0, v \in \mathbf{L}_1 , \\ v_1 \circ v_2 &\in \mathbf{L}_0 & \forall v_1, v_2 \in \mathbf{L}_1 . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Eine $\mathbf{Z}_n$ graduierte Algebra ist die direkte Summe aus n Unterräumen $\mathbf{L}_i$,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 \oplus \mathbf{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{L}_{n-1} \quad (4.6)$$

und einem Produkt mit den Eigenschaften

$$u_j \circ u_k \in \mathbf{L}_{j+k \bmod n} , \quad (4.7)$$

wobei $u_i \in \mathbf{L}_i$. Ein Produkt $\circ$ mit diesen Eigenschaft heißt *Graduierung*.

4.2.2 Graduierte Liealgebren

Eine *graduierte Liealgebra* wird aus einer $\mathbf{Z}_2$ graduierten Algebra konstruiert, indem dem Produkt $\circ$ folgende Eigenschaften auferlegt werden:

$$\begin{aligned} \text{Graduierung:} & \quad x_i \circ x_j \in \mathbf{L}_{i+j \bmod 2} \\ \text{Supersymmetrie:} & \quad x_i \circ x_j = -(-1)^{i \cdot j} x_j \circ x_i \\ \text{Jacobi-Identität:} & \quad x_k \circ (x_l \circ x_m)(-1)^{k \cdot m} + x_l \circ (x_m \circ x_k)(-1)^{l \cdot k} + \\ & \quad x_m \circ (x_k \circ x_l)(-1)^{m \cdot l} = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

wobei $x_i \in \mathbf{L}_i$ und $i = 0, 1$. Entsprechend der Supersymmetrisierung kann das Produkt sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch sein. (Bemerkung: Im Fall von bosonischen Generatoren handelt es sich bei dem Produkt z.B. um den Kommutator, bei fermionischen um den Antikommutator.) Nur der Unterraum $\mathbf{L}_0$ definiert eine Liealgebra, da dort das Produkt antisymmetrisch ist. (Vergleiche Abschnitt 3.2.5). Das Produkt im Unterraum $\mathbf{L}_1$ ist symmetrisch. Dieser ist nicht einmal eine Algebra, da wegen $x_1 \circ y_1 \in \mathbf{L}_0$ das Produkt uerhalb von $\mathbf{L}_1$ liegt.

4.2.3 Duale und konjugierte Darstellungen

Eine komplexe 2×2 Matrix $A \in \text{SL}(2, \mathbf{C})$ verfügt über vier Darstellungen, die man Automorphismen nennt:

$$\begin{aligned} \text{Selbstdarstellung:} & \quad D(A) = A \\ \text{duale Selbstdarstellung:} & \quad D(A) = A^{-1T} \\ \text{konjugierte Darstellung:} & \quad D(A) = A^{-1\dagger} \\ \text{duale konjugierte Darstellung:} & \quad D(A) = A^* \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{quivalent} \\ \text{quivalent} \\ \text{quivalent} \end{array} \quad (4.9)$$

Anwendung auf die Weyl-Spinoren: Die Weyl-Spinoren treten in zwei Sorten auf, die nach den nicht-quivalenten Darstellungen A_L und A_R transformieren. Da zu jeder dieser Darstellungen eine duale Darstellung existiert, treten vier Transformationsgesetze auf. Lorentztransformationen nach der $(\frac{1}{2}, 0)$ -Fundamentaldarstellung sind

$$\Psi'_L = A_L \Psi_L \quad (4.10)$$

$$\Psi'^{\dagger}_R = (A_R \Psi_R)^{\dagger} = \Psi_R^{\dagger} A_L^{-1}, \quad (4.11)$$

wobei in der letzten Zeile die Beziehung

$$A_L^{-1} = A_R^{\dagger} \quad (4.12)$$

ausgenützt wurde. Lorentztransformationen nach der $(0, \frac{1}{2})$ -Fundamentaldarstellung sind

$$\Psi'_R = A_R \Psi_R = A_L^{-1\dagger} \Psi_R \quad (4.13)$$

$$\Psi'^{\dagger}_L = (A_L \Psi_L)^{\dagger} = \Psi_L^{\dagger} A_L^{\dagger}. \quad (4.14)$$

Auch hier wurde wieder die Beziehung Eq. (4.12) angewandt. Man erhält also aus A_L die vier Darstellungen

$$A_L, \quad A_L^{-1}, \quad A_L^{-1\dagger}, \quad A_L^{\dagger}. \quad (4.15)$$

Da die Matrizen der dualen Darstellung hier von *rechts* wirken, steht anstelle von A_L^{-1T} (bzw. A_L^*) die transponierte Form A_L^{-1} (bzw. $A_L^{\dagger}$).

4.2.4 Gepunktete und ungepunktete Spinoren

Im folgenden wird die Indexschreibweise für Weyl-Spinoren eingeführt. Die Elemente aus zueinander dualen Räumen werden durch hoch- und tiefgestellte Indizes unterschieden. (Vergleiche beispielsweise mit den ko- und kontravarianten Vektoren.) *Die neu hinzukommenden Elemente der konjugierten Darstellungen werden durch gepunktete Indizes kenntlich gemacht.* Wir verwenden folgende Notation:

$$\begin{aligned} \Psi_L &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} & \text{und} & \quad \Psi_R^\dagger = (\psi^1, \psi^2) , \\ \Psi_R &= \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\dot{1}} \\ \bar{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} & \text{und} & \quad \Psi_L^\dagger = (\bar{\psi}_{\dot{1}}, \bar{\psi}_{\dot{2}}) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Spinorindizes werden mit Großbuchstaben bezeichnet: $\psi_A, \psi^A, \psi_{\dot{A}}, \psi^{\dot{A}}$. Jeder ungepunktete Index gehört zur $(\frac{1}{2}, 0)$ -Darstellung, jeder gepunktete Index zur $(0, \frac{1}{2})$ -Darstellung. Damit können wir folgende Lorentzinvarianten schreiben als

$$\psi_R^\dagger \psi_L = \psi^A \psi_A \quad (\text{NW} \rightarrow \text{SO}) \quad (4.17)$$

$$\psi_L^\dagger \psi_R = \bar{\psi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}} \quad (\text{SW} \rightarrow \text{NO}) . \quad (4.18)$$

Die Summenkonvention ist für die ungepunkteten und gepunkteten Indizes verschieden: Ungepunktete Indizes werden von links oben nach rechts unten (Nordwest nach Südost) summiert; gepunktete genau umgekehrt. Die übliche Summenkonvention, daß über doppeltvorkommende Indizes summiert wird, bleibt gültig.

Hinweis: Daß es sich bei Glgen. (4.17,4.18) um Invarianten handelt, zeigt man dadurch, daß man zunächst zeigt, daß die Kombination $i\phi_L^T \sigma^2 \psi_L$ unter Lorentztransformationen ($\phi_L \rightarrow A_L \phi_L$ etc.) invariant ist. Im nächsten Schritt zeigt man mithilfe von

$$\psi_R = -i\sigma^2 \psi_L^* \quad \text{und} \quad \psi_L = i\sigma^2 \psi_R^* , \quad (4.19)$$

was auch für die ϕ 's gilt, und mit $\sigma^{2T} = -\sigma^2$, daß

$$i\phi_L^T \sigma^2 \psi_L = \phi_R^\dagger \psi_L , \quad (4.20)$$

$$-i\phi_R^T \sigma^2 \psi_R = \phi_L^\dagger \psi_R . \quad (4.21)$$

Das Heben und Senken der Indizes wird durch Metrikensoren vermittelt,

$$\psi^A = \tilde{\epsilon}^{AB} \psi_B \quad , \quad \psi_A = \psi^B \tilde{\epsilon}_{BA} , \quad (4.22)$$

$$\bar{\psi}^{\dot{A}} = \bar{\psi}_{\dot{B}} \epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \quad , \quad \bar{\psi}_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \bar{\psi}^{\dot{B}} . \quad (4.23)$$

Wir legen folgendes Verhalten bei komplexer Konjugation fest

$$(\psi_A)^* := \bar{\psi}_{\dot{A}} \quad \text{und} \quad (4.24)$$

$$(\psi^A)^* := \bar{\psi}^{\dot{A}} . \quad (4.25)$$

Da bei Grassmann-Variablen die komplexe Konjugation gleich der hermiteschen Konjugation ist ($(\theta^1 \theta^2)^* = \theta^{2*} \theta^{1*}$), gilt somit auch

$$(\psi_A)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{A}} \quad \text{und} \quad (\psi^A)^\dagger = \bar{\psi}^{\dot{A}} . \quad (4.26)$$

Damit und mit der Relation $\psi_R = -i\sigma^2\psi_L^*$ zeigt man, daß

$$(\tilde{\epsilon}^{AB}) = (\tilde{\epsilon}_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

$$(\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}) = (\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Ferner gilt (da $\psi_A = \tilde{\epsilon}_A{}^B\psi_B$)

$$\tilde{\epsilon}_A{}^B = \delta_A^B \quad (4.29)$$

und per Definition

$$\tilde{\epsilon}_B^A = \tilde{\epsilon}^{AC}\tilde{\epsilon}_{CB} = -\delta_B^A. \quad (4.30)$$

Die Spinormetrik ist also antisymmetrisch

$$\tilde{\epsilon}^{BA} = -\tilde{\epsilon}^{AB}, \quad \tilde{\epsilon}_{BA} = -\tilde{\epsilon}_{AB}, \quad \tilde{\epsilon}_B^A = -\tilde{\epsilon}_B^A. \quad (4.31)$$

Analog für gepunktete Indizes, wobei allerdings $\epsilon_{\dot{A}}^{\dot{B}} = \delta_{\dot{A}}^{\dot{B}}$ und

$$\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{\dot{C}\dot{B}} = -\delta_{\dot{A}}^{\dot{B}}. \quad (4.32)$$

Mithilfe der Metriktensoren (4.27,4.28) erhält man

$$\begin{aligned} \psi^A = \tilde{\epsilon}^{AB}\psi_B &\Rightarrow \psi^1 = -\psi_2 \quad \text{und} \quad \psi^2 = \psi_1 \\ \bar{\psi}_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{B}} &\Rightarrow \bar{\psi}^{\dot{1}} = -\bar{\psi}_{\dot{2}} \quad \text{und} \quad \bar{\psi}^{\dot{2}} = \bar{\psi}_{\dot{1}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Somit folgt

$$\psi^A\psi_A = \psi^1\psi_1 + \psi^2\psi_2 = \psi^1\psi^2 - \psi^2\psi^1 = 2\psi^1\psi^2 \quad (4.34)$$

$$\bar{\psi}_{\dot{A}}\bar{\psi}^{\dot{A}} = \bar{\psi}_{\dot{1}}\bar{\psi}^{\dot{1}} + \bar{\psi}_{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{2}} = \bar{\psi}^{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{1}} - \bar{\psi}^{\dot{1}}\bar{\psi}^{\dot{2}} = 2\bar{\psi}^{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{1}}. \quad (4.35)$$

Das Kippen der Summationsindizes führt zu einem Vorzeichenwechsel,

$$\begin{aligned} \phi^A\psi_A &= \tilde{\epsilon}^{AB}\phi_B\psi^C\tilde{\epsilon}_{CA} = \tilde{\epsilon}^{AB}\tilde{\epsilon}_{CA}\phi_B\psi^C \\ &= \tilde{\epsilon}^{BA}\tilde{\epsilon}_{AC}\phi_B\psi^C = -\delta_C^B\phi_B\psi^C = -\phi_C\psi^C. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Gleiches gilt für gepunktete Indizes.

Es seien hier nochmals die wichtigsten Dinge zusammenfassend dargestellt:

- ◊ Zueinander duale Räume: hoch- und tiefgestellte Indizes.
- ◊ Zueinander konjugierte Räume: gepunktete und ungepunktete Indizes.
- ◊ Ungepunkteter Index: $(\frac{1}{2}, 0)$ -Darstellung,
Gepunkteter Index: $(0, \frac{1}{2})$ -Darstellung.
- ◊ Ungepunktete Indizes werden von links oben nach rechts unten (NW $\rightarrow$ SO) summiert; gepunktete genau umgekehrt (SW $\rightarrow$ NO).
- ◊ Ein Kippen der Summationsindizes ergibt einen Vorzeichenwechsel:

$$\phi^A \psi_A = -\phi_A \psi^A \quad \text{und} \quad \bar{\phi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}} = -\bar{\phi}^{\dot{A}} \bar{\psi}_{\dot{A}} . \quad (4.37)$$

- ◊ Die Spinorkomponenten sind Grassmann-Zahlen. Das Vertauschen zweier Spinorkomponenten liefert ein Minuszeichen.
- ◊ Komplexe Konjugation und hermitesche Konjugation sind bei den Spinorkomponenten identische Operationen. Für das Produkt zweier Spinorkomponenten folgt:

$$(\psi^1 \psi^2)^* = (\psi^1 \psi^2)^\dagger = \bar{\psi}^{\dot{2}} \bar{\psi}^{\dot{1}} . \quad (4.38)$$

Die Transformationen innerhalb der Räume sind hier nochmals angegeben

Raum	konjugierter Raum
$\psi_A \rightarrow A_L \psi_A$	$\bar{\psi}^{\dot{A}} \rightarrow A_L^{-1\dagger} \bar{\psi}^{\dot{A}}$
dualer Raum	dualer konjugierter Raum
$\psi^A \rightarrow \psi^A A_L^{-1}$	$\bar{\psi}_{\dot{A}} \rightarrow \bar{\psi}_{\dot{A}} A_L^\dagger$

Somit gilt für die Indexstruktur der Transformationsmatrizen

$$(A_L)_B^A, (A_L^{-1})_A^B, (A_L^{-1\dagger})_{\dot{A}}^{\dot{B}}, (A_L^\dagger)_{\dot{B}}^{\dot{A}} . \quad (4.39)$$

4.2.5 Bilinearformen

Im folgenden definieren wir das Skalarprodukt im Spinorraum:

$$\phi\psi := \phi^A \psi_A = \tilde{\epsilon}^{AB} \phi_B \psi_A , \quad (4.40)$$

$$\bar{\phi}\bar{\psi} := \bar{\phi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \bar{\phi}^{\dot{B}} \bar{\psi}^{\dot{A}} . \quad (4.41)$$

Wir finden

$$\phi\psi = \phi^A \psi_A = \psi^A \phi_A = \psi\phi , \quad (4.42)$$

$$\bar{\phi}\bar{\psi} = \bar{\phi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}} = \bar{\psi}_{\dot{A}} \bar{\phi}^{\dot{A}} = \bar{\psi}\bar{\phi} . \quad (4.43)$$

Für die hermitesche Konjugation gilt

$$(\phi\psi)^\dagger = (\phi^A \psi_A)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{A}} \bar{\phi}^{\dot{A}} = (\bar{\psi}\bar{\phi}) . \quad (4.44)$$

In der Tabelle 4.1 sind die wichtigsten Bilinearformen (Skalare, Vektoren und Tensoren unter Lorentztransformationen) in drei verschiedenen Schreibweisen nochmals zusammengestellt.

$i\phi_L^T \sigma^2 \psi_L = \phi_R^\dagger \psi_L$	$\phi^A \psi_A$	$(\phi\psi)$
$-i\phi_R^T \sigma^2 \psi_R = \phi_L^\dagger \psi_R$	$\bar{\phi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}}$	$(\bar{\phi}\bar{\psi})$
$\phi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$	$\phi^A \sigma_{AB}^\mu \bar{\psi}^{\dot{B}}$	$(\phi\sigma^\mu \bar{\psi})$
$\phi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L$	$\bar{\phi}_{\dot{A}} \tilde{\sigma}^{\mu\dot{A}B} \psi_B$	$(\bar{\phi}\tilde{\sigma}^\mu \psi)$
$\phi_R^\dagger \sigma^{\mu\nu} \psi_L$	$\phi^A (\sigma^{\mu\nu})_A^B \psi_B$	$(\phi\sigma^{\mu\nu} \psi)$
$\phi_L^\dagger \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \psi_R$	$\bar{\phi}_{\dot{A}} (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{A}}_{\dot{B}} \bar{\psi}^{\dot{B}}$	$(\bar{\phi}\tilde{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\psi})$

Tabelle 4.1: Die wichtigsten Bilinearformen in drei verschiedenen Notationen.

Dabei sind die zweidimensionalen Spintensoren

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{4}(\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu), \quad (4.45)$$

$$\tilde{\sigma}^{\mu\nu} := \frac{i}{4}(\tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu). \quad (4.46)$$

Die Funktionen der verschiedenen Objekte seien hier nochmals zusammengefaßt

- * Metrikensoren bilden von einem Raum in den jeweils dazu dualen Raum ab.
- * Paulimatrizen vermitteln Abbildungen zum jeweils konjugierten Raum. Daher tragen sie einen ungepunkteten und einen gepunkteten Index.
- * Die Spintensoren $\sigma^{\mu\nu}$ und $\tilde{\sigma}^{\mu\nu}$ wirken als Generatoren von Lorentztransformationen nur *innerhalb* der einzelnen Räume, so daß sie in ihrer Indezstruktur den Matrizen aus Glg.(4.39) gleichen.

4.2.6 Das Rechnen mit Weyl-Spinoren

Die Gleichungen (4.34), (4.35) lauten für den Weyl-Spinor θ

$$(\theta\theta) = 2\theta^1\theta^2 \quad \text{und} \quad (\bar{\theta}\bar{\theta}) = 2\bar{\theta}^{\dot{2}}\bar{\theta}^{\dot{1}}. \quad (4.47)$$

Aus $\tilde{\epsilon}^{12} = -\tilde{\epsilon}^{21} = -1$ erhält man $\theta^1\theta^2 = -\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{12}(2\theta^1\theta^2) = -\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{12}(\theta\theta)$ sowie $\theta^2\theta^1 = -\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{21}(\theta\theta)$. Da $\theta^1\theta^1 = \theta^2\theta^2 = 0$, kann man zusammenfassen

$$\theta^A\theta^B = -\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{AB}(\theta\theta). \quad (4.48)$$

Ebenso erhält man

$$\bar{\theta}^{\dot{A}}\bar{\theta}^{\dot{B}} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}(\bar{\theta}\bar{\theta}). \quad (4.49)$$

4.2.7 Bispinoren

Bispinoren wie die Dirac- oder Majorana-Spinoren setzen sich jeweils aus einem ungepunkteten und gepunkteten Weyl-Spinor zusammen. Sie besitzen vier Komponenten, die im folgenden mit Kleinbuchstaben $a, b = 1, \dots, 4$ gekennzeichnet werden. Wir betrachten zwei Dirac-Spinoren in der chiralen Darstellung

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \bar{\chi}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_a = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \bar{\lambda}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

und ihre konjugierten Formen

$$\bar{\Psi}_a = \Psi_a^\dagger \gamma_0 = (\bar{\psi}_A, \chi^A) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = (\chi^A, \bar{\psi}_A), \quad (4.51)$$

$$\bar{\Phi}_a = \Phi_a^\dagger \gamma_0 = (\bar{\phi}_A, \lambda^A) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = (\lambda^A, \bar{\phi}_A). \quad (4.52)$$

Der Lorentzskalar $\bar{\Psi}\Phi := \bar{\Psi}_a\Phi_a$ lautet

$$\bar{\Psi}\Phi = \chi\phi + \bar{\psi}\bar{\lambda} = (\bar{\Phi}\Psi)^\dagger, \quad (4.53)$$

wobei im letzten Schritt Glg.(4.44) verwendet wurde. Die γ -Matrizen in der chiralen Darstellung haben die Indexstruktur

$$\gamma_{ab}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{AB}^\mu \\ \tilde{\sigma}^{\mu\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_{ab}^5 = \begin{pmatrix} -\delta_A^B & 0 \\ 0 & \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Die Indexstruktur des Spintensors ist ($\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$)

$$\Sigma_{ab}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (\sigma^{\mu\nu})_A^B & 0 \\ 0 & (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

4.3 Die Poincaré-Superalgebra

Die $\mathbf{Z}_2$ -Graduierung der Poincaré-Algebra, liefert die Poincaré-Superalgebra.

4.3.1 Die SUSY-Generatoren als Bispinoren

Der Unterraum $\mathbf{L}_0$ wird von den zehn Geratoren $P^\mu, M^{\mu\nu}$ der Poincaré-Algebra aufgespannt. Man erweitert ihn durch N SUSY-Generatoren Q_a , wobei hier $N = 4$ gewählt wird. Es werden nun die Produkte *in* und *zwischen* den beiden Unterräumen definiert. Im Unterraum $\mathbf{L}_0$ haben wir

$$\mathbf{L}_0 \times \mathbf{L}_0 \rightarrow \mathbf{L}_0 : \quad \text{Poincaré-Algebra (3.61)}. \quad (4.56)$$

Beim Produkt $\mathbf{L}_0 \times \mathbf{L}_1$ müssen Vertauschungen von Q_a sowohl mit P^μ als auch mit $M^{\mu\nu}$ definiert werden. Die Matrix der Strukturkonstanten muß eine $N \times N$ Darstellungsmatrix der Generatoren aus $\mathbf{L}_0$ sein. Im Fall des Generators der Lorentztransformation $M^{\mu\nu}$ ist es die 4×4 Matrix $\Sigma^{\mu\nu}$ (3.51). Für Translationen wird die triviale Transformation gewählt. Wir haben also

$$\mathbf{L}_0 \times \mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_1 : \quad [P^\mu, Q_a] = 0 \quad (4.57)$$

$$[M^{\mu\nu}, Q_a] = -\Sigma_{ab}^{\mu\nu} Q_b. \quad (4.58)$$

Damit verhält sich Q_a bei Drehungen wie ein Spinor. Für das dritte Produkt wird der Ansatz

$$\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_0 : \quad \{Q_a, Q_b\} = h_{ab}^\mu P_\mu + k_{ab}^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \quad (4.59)$$

gemacht, wobei h^μ und $k^{\mu\nu}$ symmetrische 4×4 Matrizen sind. Außerdem soll $k^{\mu\nu}$ antisymmetrisch in den Indizes μ und ν sein. Ohne Beweis geben wir direkt die SUSY-Algebra an. Sie besteht aus insgesamt 14 Generatoren,

$$P^\mu, M^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad Q_a.$$

Für diese gelten folgende Relationen:

Poincaré-Algebra

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho) \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) . \end{aligned} \quad (4.60)$$

und

$$[P^\mu, Q_a] = 0 , \quad (4.61)$$

$$[M^{\mu\nu}, Q_a] = -\Sigma_{ab}^{\mu\nu} Q_b , \quad (4.62)$$

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2\gamma_{ab}^\mu P_\mu . \quad (4.63)$$

Aus der letzten Relation wird ersichtlich, daß zwei SUSY-Transformationen hintereinander ausgeführt eine Translation liefern! Da die lokale Translationsinvarianz (Poincaré-Invarianz) die Symmetrie ist, die zur allgemeinen Relativitätstheorie führt, ist auch ein Zusammenhang von Supersymmetrie und Gravitation zu erwarten.

4.3.2 Die SUSY-Generatoren als Weyl-Spinoren

Die SUSY-Generatoren angegeben als Weyl-Spinoren lauten

$$Q_a = \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Die Poincaré-Superalgebra (SUSY-Algebra) lautet dann in der indexfreien Notation (mit Hilfe von Glgen. (4.54,4.55))

Poincaré-Algebra Glg. (3.61)

und

$$[Q, P^\mu] = [\bar{Q}, P^\mu] = 0 , \quad (4.65)$$

$$[Q, M^{\mu\nu}] = \sigma^{\mu\nu} Q , \quad [\bar{Q}, M^{\mu\nu}] = \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \bar{Q} , \quad (4.66)$$

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma_\mu P^\mu , \quad \{\bar{Q}, Q\} = 2\tilde{\sigma}_\mu P^\mu , \quad (4.67)$$

$$\{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0 . \quad (4.68)$$

Dabei ist $\{Q, Q\}$ eine Abkürzung von $\{Q_A, Q^B\}$, und $\{\bar{Q}, \bar{Q}\}$ von $\{\bar{Q}^{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\}$. Im weiteren wird, falls nichts Gegenteiliges gesagt wird, immer die zweikomponentige Darstellung der SUSY-Generatoren in Form von Weyl-Spinoren verwendet.

4.3.3 Der supersymmetrische Grundzustand

Aus der SUSY-Algebra ergeben sich wichtige Folgerungen. So ergibt sich aus $\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma_\mu P^\mu$ für den Hamiltonoperator H ,

$$H = \frac{1}{4}(Q_1 + \bar{Q}_1)^2 + \frac{1}{4}(Q_2 + \bar{Q}_2)^2 . \quad (4.69)$$

Da $\bar{Q}_A = Q_A^\dagger$, ist der Hamiltonoperator hermitesch. Er besitzt daher reelle Eigenwerte, und das Quadrat der Eigenwerte ist immer eine nichtnegative Zahl. Daher gilt

Das Energiespektrum ist nichtnegativ: $E \geq 0$.

Zustände mit der Energie Null sind supersymmetrische Grundzustände. *Grundzustände*, da der Erwartungswert von H bei Null sein Minimum hat. *Supersymmetrisch*, da wegen (4.69)

$$\langle 0|H|0 \rangle = 0 \Rightarrow Q|0 \rangle = \bar{Q}|0 \rangle = 0. \quad (4.70)$$

Demnach brechen Grundzustände mit positiver Energie die Supersymmetrie spontan. Zur Erinnerung:

Spontane Symmetriebrechung: Sei der Hamiltonoperator H invariant gegenüber einer Transformation $[H, G] = 0$, wobei G den Generator dieser Transformation bezeichnet. Bei spontaner Symmetriebrechung respektiert der Grundzustand *nicht* diese Symmetrie, $G|0 \rangle \neq 0$. D.h.

$$[H, G] = 0 \quad \text{und} \quad \begin{cases} G|0 \rangle = 0 & (\text{Symmetrie exakt}) \\ G|0 \rangle \neq 0 & (\text{spontan gebrochen}) \end{cases} \quad (4.71)$$

4.3.4 Die Boson-Fermion-Regel

Zur Herleitung dieser Regel verwenden wir den Witten-Index $\Delta = \text{Tr}(-1)^{N_F}$, wobei N_F der Teilchenzahloperator für Fermionen ist. Er besitzt den Eigenwert $+1$, wenn er auf einen bosonischen Zustand wirkt, den Eigenwert -1 , wenn er auf einen fermionischen Zustand wirkt. Da die SUSY-Generatoren $Q, \bar{Q}$ Bosonen in Fermionen umwandeln, haben wir

$$(-1)^{N_F} Q = -Q(-1)^{N_F}, \quad (4.72)$$

und für $\bar{Q}$ analog. Wir haben

$$\Delta\{Q, \bar{Q}\} = \text{Tr}[(-1)^{N_F} Q \bar{Q}] + \text{Tr}[(-1)^{N_F} \bar{Q} Q]. \quad (4.73)$$

Wegen der Zyklidizität der Spur gilt für den zweiten Term

$$\text{Tr}[Q(-1)^{N_F} \bar{Q}] = -\text{Tr}[(-1)^{N_F} Q \bar{Q}] \quad (4.74)$$

und somit $\Delta\{Q, \bar{Q}\} = 0$. Demnach muß wegen $\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma_\mu P^\mu$ auch gelten

$$2\sigma_\mu \text{Tr}[(-1)^{N_F} P^\mu] = 0. \quad (4.75)$$

Für einen festen, von Null verschiedenen Viererimpuls (der Grundzustand bei $E = 0$ sei ausgeschlossen) folgt also

$$\Delta = \text{Tr}(-1)^{N_F} = 0. \quad (4.76)$$

Da aber Δ die Differenz der Anzahl der bosonischen und fermionischen Zustände ist, folgt daraus

Zahl der Bosonen = Zahl der Fermionen.

Damit ist die Zahl der Freiheitsgrade bzw. Komponentenfelder gemeint. Die Zahl der Freiheitsgrade ist für ein: reelles skalares Feld 1, ein komplexes skalares Feld 2, einen Weyl-Spinor und einen Majorana-Spinor 4, einen Dirac-Spinor 8 und ein reelles Vektorfeld 4.

Ferner folgt aus $[Q, P^\mu] = 0$ und daraus, daß der Operator Q Bosonen in Fermionen umwandelt und vice versa, ($H = P^0$),

$$\begin{aligned} H|B\rangle &= m_B|B\rangle \\ QH|B\rangle &= HQ|B\rangle = H|F\rangle = m_F|F\rangle \\ &= m_B|F\rangle \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\Rightarrow m_B|F\rangle = m_F|F\rangle \Rightarrow m_B = m_F . \quad (4.78)$$

Das heißt

Die Massen der durch SUSY-Transformationen verbundenen fermionischen und bosonischen Zustände sind gleich: $m_B = m_F$.

4.4 SUSY-Teilchen

Die SUSY-Teilchen werden über die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Superalgebra eingeführt. Die irreduziblen Darstellungen der SUSY-Algebra werden nach den Eigenwerten der Casimir-Operatoren klassifiziert.

Zur Erinnerung: Ein *Casimir-Operator* ist ein Operator, der mit allen Generatoren vertauscht.

Die SUSY-Algebra besitzt die beiden

$$\text{Casimir-Operatoren:} \quad P^2 = P^\mu P_\mu \quad \text{und} \quad C^2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} . \quad (4.79)$$

Dabei ist der Operator

$$C^{\mu\nu} := Y^\mu P^\nu - Y^\nu P^\mu , \quad (4.80)$$

mit dem Superspin-Vektor

$$Y^\mu := W^\mu - \frac{1}{4} Q \sigma^\mu \bar{Q} . \quad (4.81)$$

Der Superspin-Vektor ist die Verallgemeinerung des Pauli-Lubanski-Vektors W^μ auf die Supersymmetrie, d.h. unter Einschluß eines Terms, der auch von dem fermionischen Operatoren Q abhängt.

Zur Erinnerung: Die Einführung des Paul-Lubanski-Vektors W^μ ,

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} , \quad (4.82)$$

ermöglicht die Verallgemeinerung des Spinbegriffs auf eine relativistische Beschreibung.

Die Eigenwerte der Casimir-Operatoren der SUSY-Algebra sind durch die Masse m eines Teilchens und den sogenannten Superspin y gegeben. Damit wird jede (massive) Darstellung durch Masse m und Superspin y charakterisiert, also durch das Zahlenpaar (m, y) . Wir

nennen in Zukunft die Gesamtheit der Zustände einer Darstellung (m, y) Supermultiplett.

Anmerkung: Im Clifford-Vakuum entspricht der Superspin dem Spin. Das Clifford-Vakuum $|\Omega\rangle$ ist definiert durch $Q_A|\Omega\rangle = 0$, $A = 1, 2$.

Intermezzo: In Abschnitt 4.3.2 ist die SUSY-Algebra bei Erweiterung um einen fermionischen Operator Q angegeben, die $N = 1$ -Supersymmetrie. Um wieviel fermionische Operatoren können wir die Poincaré-Algebra erweitern? Die aus Q gebildeten Erzeugungsoperatoren erhöhen den Spin eines Teilchens um $\frac{1}{2}$. Lassen wir gemäß einer im Raum flachen renormierbaren Feldtheorie maximal den Spin 1 zu, so haben wir $\lambda_{max} = 1$ und damit gemäß

$$|-\lambda_{max} > \dots |-\lambda_{max} + \frac{N}{2} > = |\lambda_{max} > \quad (4.83)$$

$N = 4$ SUSY-Operatoren. Verzichten wir im Rahmen von Supergravität auf die Forderung nach Renormierbarkeit und lassen Spin-2 Teilchen (Graviton) zu, so ergibt sich $N = 8$.

4.5 Das chirale Supermultiplett

Für $y = 0$ erhalten wir die einfachste Darstellung der SUSY-Algebra. Wir nennen sie chirales Supermultiplett. Das Clifford-Vakuum ist hier ein *bosonischer* Zustand. Zu dem Multiplett gehören

$$(m, 0) \quad \text{---} \quad y_3 = 0 \quad \text{---} \quad \left\{ \begin{array}{ll} s_3 = 0 & \text{skalares Teilchen} \\ s_3 = +\frac{1}{2} & \text{Spin-}\frac{1}{2}\text{-Teilchen} \\ s_3 = -\frac{1}{2} & \text{Spin-}\frac{1}{2}\text{-Teilchen} \\ s_3 = 0 & \text{pseudoskalares Teilchen} \end{array} \right. \quad (4.84)$$

Es beschreibt Materiefelder, Quarks und Leptonen und ihre Superpartner Squarks und Sleptonen. Higgsteilchen und ihre Superpartner ordnet man ebenfalls dieser Darstellung zu.

Fermion	Boson
Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen	Spin-0-Teilchen
Quarks	Squarks
Leptonen	Sleptonen
Higgsinos	Higgs

4.6 Das Vektor-Supermultiplett

Für $y = \frac{1}{2}$ erhalten wir das Vektor-Supermultiplett. Das Clifford-Vakuum ist ein *fermionischer* Zustand. Zu dem Multiplett gehören 2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, ein Vektorteilchen (Spin 1) und ein pseudoskalares Teilchen (Spin 0). Da man allerdings aus $s_3 = 0$ noch nicht auf den Spinbetrag $s = 0$ schließen kann, handelt sich i.a. um eine Mischung aus Spin-0 und Spin-1

Anteilen. Allein das Clifford-Vakuum ist der einzige Zustand mit scharfem Spinbetrag.

$$\begin{aligned}
 (m, \frac{1}{2}) < \quad y_3 = +\frac{1}{2} \quad - - - - \quad & \left\{ \begin{array}{ll} s_3 & s \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \text{Fermion} \\ 1 & 1 & \text{Boson} \\ 0 & 0, 1 & \text{Boson} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \text{Fermion} \end{array} \right. \\
 y_3 = -\frac{1}{2} \quad - - - - \quad & \left\{ \begin{array}{ll} s_3 & s \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \text{Fermion} \\ 0 & 0, 1 & \text{Boson} \\ -1 & 1 & \text{Boson} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \text{Fermion} \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

Das Vektormultiplett dient der Beschreibung der Eichbosonen und ihrer Superpartner.

Boson	Fermion
Spin-1-Teilchen	Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen
Photon	Photino
W- und Z-Boson	Wino, Zino
Gluon	Gluino

4.7 Kovariante Ableitungen

Die Ableitung nach ungepunkteten und gepunkteten Weyl-Spinoren sei abgekürzt durch

$$\begin{aligned}
 \partial_A &:= \frac{\partial}{\partial \theta^A} \quad , \quad \partial^A := \frac{\partial}{\partial \theta_A} \quad , \\
 \bar{\partial}_{\dot{A}} &:= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{A}}} \quad , \quad \bar{\partial}^{\dot{A}} := \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{A}}} \quad .
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Kovariante Ableitungen sind definiert als

$$D_A := \partial_A + i(\sigma^\mu \bar{\theta})_A \partial_\mu \quad , \tag{4.87}$$

$$\bar{D}^{\dot{A}} := \bar{\partial}^{\dot{A}} + i(\tilde{\sigma}^\mu \theta)^{\dot{A}} \partial_\mu \quad , \tag{4.88}$$

$$D^A := \tilde{\epsilon}^{AB} D_B = -\partial^A - i(\bar{\theta} \tilde{\sigma}^\mu)^A \partial_\mu \quad , \tag{4.89}$$

$$\bar{D}_{\dot{A}} := \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \bar{D}^{\dot{B}} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} - i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{A}} \partial_\mu = -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i(\tilde{\sigma}^\mu \theta)_{\dot{A}} \partial_\mu \quad . \tag{4.90}$$

Dabei sind die $\sigma^\mu, \tilde{\sigma}^\mu$ in Glg. (3.49) gegeben. Eine wichtige Eigenschaft der kovarianten Ableitungen ist, daß sie invariant unter SUSY-Transformationen sind.

Kapitel 5

Superfelder, Lagrangedichte

Wir werden uns im folgenden mit der Supersymmetrie in (1+3) Dimensionen beschäftigen. Es handelt sich hierbei um eine Feldtheorie im reellen Superraum. Dieser besteht aus vier bosonischen und vier fermionischen Koordinaten. Jeweils zwei der fermionischen Koordinaten werden zu einem Weyl-Spinor zusammengefaßt, so daß wir zwei Weyl-Spinoren θ und $\bar{\theta}$ haben. Der Superraum ist also gekennzeichnet durch

$$z = [x_\mu; \theta, \bar{\theta}] \quad x_\mu = \text{Raumzeit}, \theta_{1,2}, \bar{\theta}^{1,2} = \text{fermionische Koordinaten.} \quad (5.1)$$

5.1 Das Superfeld

Das Superfeld ist eine Kombination von Feldern, die zu demselben Multiplett gehören, in ein einziges Feld. Die Superfelder sind im Superraum definiert.

5.1.1 Die Komponenten des Superfeldes

Das Superfeld $\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$ hängt von der Raumzeit x^μ und den fermionischen Koordinaten in Form der Weyl-Spinoren θ und $\bar{\theta}$ ab. Um den *Inhalt* des Superfeldes zu sehen, entwickeln wird dieses in eine Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) \\ & + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x) . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Hierbei ist, siehe Glg.(4.47),

$$(\theta\theta) = 2\theta^1\theta^2 \quad \text{und} \quad (\bar{\theta}\bar{\theta}) = 2\bar{\theta}^{\dot{1}}\bar{\theta}^{\dot{2}} . \quad (5.3)$$

Die Felder $f, \phi, \bar{\chi}, M, N, A_\mu, \bar{\lambda}, \alpha$ und d heißen Komponentenfelder. Ihr Verhalten unter Lorentztransformationen ergibt sich aus der Forderung:

Das Superfeld $\mathcal{F}$ ist ein Lorentzskalar.

Somit haben wir

◇ 4 komplexe skalare Felder: $f(x), M(x), N(x), d(x)$,

- ◇ 2 linkshändige Weyl-Spinorfelder: $\phi(x), \alpha(x)$,
- ◇ 2 rechtshändige Weyl-Spinorfelder: $\bar{\chi}(x), \bar{\lambda}(x)$,
- ◇ 1 komplexes Vektorfeld: $A_\mu(x)$.

Die Boson-Fermion-Regel ist erfüllt, siehe Abschnitt 4.3.4, da wir 16 reelle bosonische und 16 reelle fermionische Freiheitsgrade haben.

5.1.2 Eingeschränkte Superfelder

Linearkombinationen von Superfeldern ergeben wieder Superfelder. Superfelder liefern somit eine lineare Darstellung der SUSY-Algebra. Allerdings ist diese Darstellung reduzibel. Um zu den irreduziblen Darstellungen zu gelangen, werden Zusatzforderungen an das Superfeld gestellt. Diese müssen kovariant sein, d.h. invariant gegenüber SUSY-Transformationen. Jede *kovariante Bedingung* liefert ein eingeschränktes Superfeld (constraint superfield):

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_{\dot{A}}\mathcal{F} = 0 &\Rightarrow \text{chirales Superfeld } \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\
 D_A\mathcal{F} = 0 &\Rightarrow \text{antichirales Superfeld } \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \\
 \mathcal{F} = \mathcal{F}^\dagger &\Rightarrow \text{Vektor-Superfeld } V(x, \theta, \bar{\theta})
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Die chiralen und antichiralen Felder werden auch als *skalare* Superfelder bezeichnet. Jedes reelle Superfeld ist ein Vektor-Superfeld. Chirale und antichirale Superfelder beschreiben die Materieteilchen. Das Vektor-Superfeld beschreibt die Eichfelder.

$$\begin{array}{llll}
 \text{Superfeld } \mathcal{F} & \xrightarrow{\mathcal{F}=\mathcal{F}^\dagger} & \text{Vektor-Superfeld } V \text{ (reell)} & \text{Eichfelder} \\
 \text{(reduzibel)} & \longrightarrow & \begin{array}{l} \text{skalares Superfeld} \xrightarrow{\bar{D}\mathcal{F}=0} \text{Chirales Superfeld } \Phi \\ \text{skalaes Superfeld} \xrightarrow{D\mathcal{F}=0} \text{Antichirales Superfeld } \Phi^\dagger \end{array} & \begin{array}{l} \text{Materiefelder} \end{array}
 \end{array} \tag{5.5}$$

5.2 Skalare Superfelder

Wir betrachten zunächst skalare Superfelder im komplexen Superraum, wo sie eine besonders einfache Form haben, und übertragen sie dann in den reellen Superraum.

5.2.1 Chirale Superfelder im komplexen Superraum

Das chirale Superfeld ist durch die kovariante Bedingung

$$\bar{D}_{\dot{A}}\Phi = 0 \tag{5.6}$$

definiert. Betrachten wir zunächst die komplexe Raumkoordinate $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$. Die Anwendung von $\bar{D}_{\dot{A}}$ ergibt

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_{\dot{A}}y^\mu &= [-\bar{\partial}_{\dot{A}} - i(\theta\sigma^\nu)_{\dot{A}}\partial_\nu](x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \\
 &= -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{A}}}(\theta^C\sigma^\mu_{C\dot{B}})\bar{\theta}^{\dot{B}} - i(\theta\sigma^\nu)_{\dot{A}}\partial_\nu x^\mu \\
 &= i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{A}} - i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{A}} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ebenso ist $\bar{D}_A \theta^B = 0$. Jede Funktion von y und θ , also $\Phi(y, \theta)$, erfüllt damit automatisch die Bedingung Glg.(5.6). Man kann zeigen, daß dies auch die *allgemeinste* Form eines chiralen Superfeldes ist. Die Taylorentwicklung ergibt dann

$$\Phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y) \quad (5.8)$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ ist Konvention. Das chirale Superfeld beinhaltet also

- ◇ 1 komplexes Skalarfeld φ zur Beschreibung von Sleptonen und Squarks.
- ◇ 1 linkshändiges Weyl-Spinorfeld ψ zur Beschreibung von Leptonen und Quarks.
- ◇ 1 komplexes Skalarfeld F als Hilfsfeld.

Zur Behandlung des antichiralen Superfeldes gehen wir von der kovarianten Bedingung

$$D_A \Phi^\dagger = 0 \quad (5.9)$$

aus. Wir führen die komplexe Raumkoordinate

$$\bar{y}^\mu := x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} = (y^\mu)^* \quad (5.10)$$

ein. Es folgt, daß $D_A \bar{y}^\mu = 0$ und $D_A \bar{\theta} = 0$. Somit erfüllt jede Funktion von $\bar{y}, \bar{\theta}$, also $\Phi^\dagger(\bar{y}, \bar{\theta})$ die Bedingung Glg.(5.9). Das allgemeinste antichirale Superfeld hat damit die Form

$$\Phi^\dagger(\bar{y}, \bar{\theta}) = \varphi^*(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^*(\bar{y}) \quad (5.11)$$

5.2.2 Chirale Superfelder im reellen Superraum

Die Gestalt der chiralen Superfelder im reellen Superraum ist komplizierter. Ausgehend von Glg.(5.8) und indem man y durch $x + i\theta\sigma\bar{\theta}$ ersetzt und anschließend Taylor-entwickelt, findet man für das chirale Feld im reellen Superraum

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & \varphi + \sqrt{2}\theta\psi + (\theta\theta)F + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\square\varphi. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Man hat jetzt sechs Terme, die Zahl der Komponentenfelder (φ, ψ, F) ist aber gleich geblieben. Durch hermitesche Konjugation erhält man das antichirale Superfeld im reellen Superraum

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = & \varphi^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^* - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi^* \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu(\theta\sigma^\mu\bar{\psi}) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\square\varphi^*. \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.2.3 Produkte von chiralen Superfeldern

Produkte von skalaren Superfeldern Φ sind wieder chirale Superfelder. Davon kann man sich überzeugen, wenn man beispielsweise $\Phi(y, \theta)\Phi(y, \theta)$ oder Φ^3 mithilfe von Glg. (5.8) ausrechnet. Die Ergebnisse lassen sich für beliebige Potenzen, aber auch für Produkte aus verschiedenen chiralen Superfeldern verallgemeinern. Zu einer qualitativ neuen Form von Superfeldern gelangt man erst, wenn ein chirales mit einem antichiralen Superfeld multipliziert wird, also $\Phi^\dagger\Phi$. Da $(\Phi^\dagger\Phi)^\dagger = \Phi^\dagger\Phi$ handelt es sich um ein reelles Superfeld, ein Vektor-Superfeld. Unter Benützung von Glgen. (5.12, 5.13) und nach diversen Vereinfachungen erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger\Phi &= \varphi^*\varphi + \sqrt{2}\varphi^*(\theta\psi) + \sqrt{2}\varphi(\bar{\theta}\bar{\psi}) + (\theta\theta)\varphi^*F + (\bar{\theta}\bar{\theta})\varphi F^* \\
&+ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})[i\varphi^*\partial_\mu\varphi - i\varphi\partial_\mu\varphi^* + \psi\sigma_\mu\bar{\psi}] \\
&+ \sqrt{2}(\theta\theta)[(\bar{\theta}\bar{\psi})F - \frac{i}{2}\varphi^*\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) + \frac{i}{2}(\psi\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi^*] \\
&+ \sqrt{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})[(\theta\psi)F^* + \frac{i}{2}\varphi\partial_\mu(\theta\sigma^\mu\bar{\psi}) - \frac{i}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\psi})\partial_\mu\varphi] \\
&+ \Phi^\dagger\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) ,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \left\{ -\frac{1}{4}(\varphi^*\square\varphi + \varphi\square\varphi^*) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + F^*F \right\} .
\end{aligned} \tag{5.15}$$

5.3 Das Vektor-Superfeld

5.3.1 Ansatz

Die kovariante Bedingung für das Vektor-Superfeld lautet

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{5.16}$$

Mit Glg.(5.2) haben wir

$$\begin{aligned}
V(x, \theta, \bar{\theta}) &= f + \theta\phi + \bar{\theta}\bar{\chi} + (\theta\theta)M + (\bar{\theta}\bar{\theta})N \\
&\quad + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda} + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Der Vergleich mit dem entsprechenden Feld $V^\dagger$ liefert dann für die Realitätsbedingung des Vektorfeldes

$$f = f^* , \quad A_\mu = A_\mu^* , \quad d = d^* , \quad M = N^* , \quad \phi = \chi , \quad \lambda = \alpha . \tag{5.18}$$

Somit besitzt das Vektorfeld nur zwei Weyl-Spinorfelder ϕ und λ , jeweils mit zwei komplexen Komponenten, also insgesamt acht reelle fermionische Freiheitsgrade. Was die bosonischen Felder angeht, so haben wir zwei reelle Felder f und d , ein komplexes Feld M und ein reelles Vektorfeld A_μ , also auch acht reelle Freiheitsgrade.

Jedes *reelle* Superfeld ist per Definition ein Vektor-Superfeld. Vektor-Superfelder lassen sich also auch aus chiralen und antichiralen Superfeldern aufbauen. Z.B.

$$\Phi^\dagger \Phi, (\Phi + \Phi^\dagger) \quad \text{und} \quad i(\Phi - \Phi^\dagger). \quad (5.19)$$

Oft wird folgende Form für das Vektor-Superfeld verwendet:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & f + i\theta\phi - i\bar{\theta}\bar{\phi} + \frac{i}{2}(\theta\theta)M - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})M^* \\ & + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + i(\theta\theta)\bar{\theta}(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi) \\ & - i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\phi}) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(d - \frac{1}{2}\square f), \end{aligned} \quad (5.20)$$

mit den reellen bosonischen Felder f, d und A_μ sowie dem komplexen bosonischen Feld M und den Weyl-Spinorfeldern ϕ und λ .

5.3.2 SUSY Eichtransformation

Betrachten wir folgende Eichtransformation des Vektor-Superfeldes

$$V \rightarrow V' = V + (\Phi + \Phi^\dagger) \quad (5.21)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (5.8, 5.11) in die Eichtransformation erhält man mithilfe von Glg. (5.20) das Transformationsverhalten der einzelnen Komponentenfelder:

$$f' = f + \varphi + \varphi^*, \quad (5.22)$$

$$\phi' = \phi - i\sqrt{2}\psi, \quad (5.23)$$

$$M' = M - 2iF, \quad (5.24)$$

$$A'_\mu = A_\mu + i\partial_\mu(\varphi - \varphi^*), \quad (5.25)$$

$$\lambda' = \lambda, \quad (5.26)$$

$$d' = d. \quad (5.27)$$

Die Felder λ und d bleiben somit invariant unter Eichtransformationen. Das reelle Vektorfeld verhält sich wie bei der lokalen Eichtransformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - 2\partial_\mu\Lambda \quad \text{und} \quad \Lambda = \text{Im}\varphi. \quad (5.28)$$

Außerdem ist der antisymmetrische Feldstärkentensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.29)$$

eichinvariant. Die SUSY Eichtransformation (5.21) beinhaltet also die lokale Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes A_μ ¹. Der fermionische Superpartner λ des bosonischen Feldes A_μ bleibt invariant. Außerdem enthält das Vektor-Superfeld noch die Felder f, ϕ und M . Diese sollen im folgenden eliminiert werden.

¹Die SUSY Eichtransformation 5.21 hat nichts mit der *lokalen* Supersymmetrie zu tun, die zur Gravitation führt.

5.3.3 Die Wess-Zumino Eichung

Durch geeignete Wahl des chiralen Superfeldes Φ mit den Komponenten (φ, ψ, F) kann man erreichen, daß das eichtransformierte Vektor-Superfeld V' die Komponentenfelder f, ϕ, M nicht mehr enthält. Diese Eichfixierung nennt man Wess-Zumino-Eichung. Sie lautet:

$$2\text{Re } \varphi = \varphi + \varphi^* = -f, \quad (5.30)$$

$$\psi = -\frac{i}{\sqrt{2}}\phi, \quad (5.31)$$

$$F = -\frac{i}{2}M. \quad (5.32)$$

Unter Verwendung von Glg. (5.20) erhält man dann aus (5.21) in der Wess-Zumino-Eichung

$$\begin{aligned} V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = & (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})[A_\mu + i\partial_\mu(\varphi - \varphi^*)] + i(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda} \\ & - i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Somit besteht nun das gesamte Multipllett nur noch aus einem Eichfeld $A_\mu(x)$, seinem SUSY-Partner $\lambda(x)$ und einem Hilfsfeld $d(x)$.

Da in der Wess-Zumino-Eichung nur der Realteil des Skalarfeldes fixiert wurde, bleibt der Imaginärteil von φ als Eichfreiheitsgrad für die konventionelle Eichfixierung Glg. (5.28) erhalten. Man kann beispielsweise $A_0 = 0$ fordern, so daß das reelle Vektorfeld A_μ statt *vier* nur noch *drei* Freiheitsgrade besitzt.

Wir erhalten also für das Vektor-Superfeld in der Wess-Zumino-Eichung und der konventionellen Eichung (A'_μ wurde gleich A_μ gesetzt)

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d \quad (5.34)$$

Ursprünglich hatten wir für die Zahl der Freiheitsgrade (FG) des Vektor-Superfeldes ohne die Wess-Zumino-Eichung

zwei reelle Skalarfelder f, d :	2 bosonische FG
ein komplexes Skalarfeld M :	2 bosonische FG
zwei komplexe Weyl-Spinorfelder ϕ, λ :	8 fermionische FG
ein reelles Vektorfeld A_μ :	4 bosonische FG

In der Wess-Zumino-Eichung werden diese insgesamt 16 Freiheitsgrade auf die Hälfte, also 8 Freiheitsgrade reduziert:

ein reelles Skalarfeld d :	1 bosonischer FG
ein komplexes Weyl-Spinorfeld λ :	4 fermionische FG
ein reelles Vektorfeld A_μ :	3 bosonische FG
(ein FG entfällt durch konventionelle Eichfixierung)	

In beiden Fällen ist die Boson-Fermion-Regel erfüllt. Wir haben also durch verschiedene Eichungen die Zahl der Freiheitsgrade reduziert:

$$\begin{aligned} (f, \phi, 0, M, 0, A_\mu, \lambda, 0, d) & \quad \text{Vektor-Superfeld} & (16 \text{ FG}) \\ \downarrow \text{Wess-Zumino-Eichung} & & \\ (\text{Im}\varphi, 0, 0, 0, A_\mu, \lambda, 0, d) & & (5.35) \\ \downarrow \text{konventionelle Eichung} & & \\ (0, 0, 0, 0, A'_\mu, \lambda, 0, d) & & (8 \text{ FG}) \end{aligned}$$

Unter Anwendung von

$$(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) \quad (5.36)$$

findet man für die Potenzen des Vektor-Superfeldes in der Wess-Zumino-Eichung

$$V_{WZ}^2 = \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})A_\mu A^\mu, \quad (5.37)$$

$$V_{WZ}^3 = 0. \quad (5.38)$$

Alle höhere Potenzen verschwinden.

5.3.4 Die supersymmetrische Feldstärke

Die supersymmetrische Feldstärke eines Vektor-Superfeldes $V(x, \theta, \bar{\theta})$ sei definiert durch

$$W_A := -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (5.39)$$

$$\bar{W}_{\dot{A}} := -\frac{1}{4}(DD)\bar{D}_{\dot{A}} V(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (5.40)$$

Bisher waren alle Superfelder Lorentzskalare. Die supersymmetrische Feldstärke W_A aber gehört zur $(\frac{1}{2}, 0)$ -, $\bar{W}_{\dot{A}}$ zur $(0, \frac{1}{2})$ -Fundamentaldarstellung der Lorentzgruppe. Wegen $D^3 = \bar{D}^3 = 0$ handelt es sich um chirale und antichirale Superfelder, da

$$\bar{D}_{\dot{A}} W_A = -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{A}}(\bar{D}\bar{D})D_A V = 0, \quad (5.41)$$

$$D_A \bar{W}_{\dot{A}} = -\frac{1}{4}D_A(DD)\bar{D}_{\dot{A}} V = 0. \quad (5.42)$$

Die supersymmetrischen Feldstärken sind unter supersymmetrischen Eichtransformationen (5.21) eichinvariant,

$$W_A = W'_A \quad \text{und} \quad \bar{W}_{\dot{A}} = \bar{W}'_{\dot{A}}. \quad (5.43)$$

Denn wegen $\bar{D}\Phi = D\Phi^\dagger = 0$ und

$$[D, \bar{D}^2] = -4i(\sigma^\mu \bar{D})\partial_\mu \quad (5.44)$$

gilt

$$\begin{aligned} W_A \rightarrow W'_A &= -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V' = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A(V + \Phi + \Phi^\dagger) \\ &= W_A - \frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A \Phi = W_A + \frac{1}{4}[D_A, \bar{D}^2]\Phi \\ &= W_A - i\sigma^\mu_{A\dot{A}}\partial_\mu \bar{D}^{\dot{A}}\Phi = W_A. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Analog zeigt man die Eichinvarianz von $\bar{W}_{\dot{A}}$.

Die Komponenten der supersymmetrischen Feldstärke

Durch Übergang in den komplexen Superraum $(y, \theta, \bar{\theta})$ erhält man unter Verwendung von (5.40) ausgehend vom Vektor-Superfeld in der Wess-Zumino-Eichung nach einigen mathematischen Umformungen (auf die Herleitung sei hier verzichtet) schließlich die Komponentenzerlegung der supersymmetrischen Feldstärke als

$$W_A = i\lambda_A - 2d\theta_A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu} - (\theta\theta)(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_A . \quad (5.46)$$

Es gehen hier die Felder $\lambda, F_{\mu\nu}, d$ ein. Wie wir bereits gesehen haben, sind diese Komponentenfelder eichinvariant.

5.4 Supersymmetrische Lagrangedichten

Aus den skalaren und Vektor-Superfeldern kann nun die supersymmetrische Lagrangedichte aufgebaut werden. Ziel ist es, eine supersymmetrische Lagrangedichte zu finden, die das Wirkungspotential

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (5.47)$$

bei SUSY-Transformationen nicht ändert, also $\delta_\epsilon S = 0$. Dabei wird ausgenützt, daß die höchsten Komponenten eines Superfeldes sich wie Viererdivergenzen transformieren. Im Falle des allgemeinen Superfeldes $\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$ und des chiralen Superfeldes $\Phi(y, \theta)$ sind sie gegeben durch

$$\delta_\epsilon \mathcal{F} : \quad \delta d = \frac{i}{2} \partial_\mu (\epsilon \sigma^\mu \bar{\lambda} - \alpha \sigma^\mu \bar{\epsilon}) , \quad (5.48)$$

$$\delta_\epsilon \Phi : \quad \delta F = i\sqrt{2} \partial_\mu (\bar{\epsilon} \tilde{\sigma}^\mu \psi) . \quad (5.49)$$

Man sagt, ein Feld ist vom D -Typ, wenn es zur $(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$ -Komponente gehört, vom F -Typ, wenn es zur $(\theta\theta)$ -Komponente gehört. Verknüpfungen von Superfeldern durch Multiplikation und Addition ergeben wieder Superfelder, deren höchste Komponente bei SUSY-Transformationen ebenfalls zu einer Viererdivergenz führt. Das Raum-Zeit-Integral einer Vierdivergenz wird nach dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral transformiert, welches Null liefert, da es in beliebig große Raumbereiche ausgedehnt werden kann, wo die Felder verschwinden. Somit ist die supersymmetrische Lagrangedichte gegeben durch die höchste Komponente der Superfelder oder die höchste Komponente von Produkten von Superfeldern:

$$\mathcal{L} = (\text{Superfelder})|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + (\text{chirale Superfelder})|_{\theta\theta y \rightarrow x} + HC . \quad (5.50)$$

Der vertikale Strich bezeichnet die jeweils höchste Komponente. Beim chiralen Superfeld muß, nachdem die $(\theta\theta)$ -Komponente herausprojiziert wurde, noch der Übergang von der Koordinate y nach x gemacht werden. Schließlich werden die hermitesch konjugierten Terme addiert, damit die Lagrangedichte reell ist. Da die höchsten Komponenten der Superfelder bosonisch sind, ist auch die Lagrangedichte eine bosonische Funktion.

Die *supersymmetrische* Lagrangedichte ist also invariant bis auf eine Viererdivergenz

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} = \partial_\mu \Lambda^\mu , \quad (5.51)$$

wobei Λ^μ ein Vierervektor ist. Die Wirkung ist damit invariant, da

$$\delta_\epsilon S = \int d^4x \delta_\epsilon \mathcal{L} = \int d^4x \partial_\mu \Lambda^\mu = \text{Oberflächenintegral} \rightarrow 0. \quad (5.52)$$

5.4.1 Die Lagrangedichte für chirale Superfelder

Die Lagrangedichte besteht aus einem kinetischen, Massen- und einem Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int}. \quad (5.53)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin} &= \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta})|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}, \\ \mathcal{L}_m &= -\frac{m}{2} \Phi^2(y, \theta)|_{\theta\theta y \rightarrow x} + H.C. \\ \mathcal{L}_{int} &= -\frac{g}{3} \Phi^3(y, \theta)|_{\theta\theta y \rightarrow x} + H.C.. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Es bezeichnet m die Masse und g die Kopplungskonstante, die beide reell angenommen werden. Um $\mathcal{L}_{kin}$ abzuleiten, verwenden wir Glg. (5.15). Mithilfe von $u \square v = \partial_\mu(u \partial^\mu v) - (\partial_\mu u)(\partial^\mu v)$ und dem Fortlassen der Viererdivergenz $\partial_\mu(u \partial^\mu v)$ erhalten wir

$$\mathcal{L}_{kin} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) + F^* F. \quad (5.55)$$

5.4.2 Das Superpotential

Anstelle von (5.53) können wir auch schreiben

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} - [U(\Phi)|_{\theta\theta y \rightarrow x} + h.c.], \quad (5.56)$$

mit dem Potential

$$U(\Phi) = \frac{m}{2} \Phi^2 + \frac{g}{3} \Phi^3. \quad (5.57)$$

Dieses Potential ist eine Superfunktion und genügt also der Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} U(\Phi) &= U(\varphi + \Phi_S) \\ &= U(\varphi) + \frac{dU(\varphi)}{d\varphi} \Phi_S + \frac{1}{2} \frac{d^2 U(\varphi)}{d\varphi^2} \Phi_S^2, \end{aligned} \quad (5.58)$$

wobei (zur Erinnerung $\Phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y)$)

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \sqrt{2}\theta\psi + (\theta\theta)F \\ \Phi_S^2 &= -(\psi\psi)(\theta\theta) \\ \Phi_S^3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

In der zweiten Gleichung haben wir

$$(\theta\psi)(\theta\psi) = -\frac{1}{2}(\psi\psi)(\theta\theta) \quad (5.60)$$

verwendet. Das Potential $U(\varphi)$ und seine Ableitungen sind gegeben durch

$$U(\varphi) = \frac{m}{2}\varphi^2 + \frac{g}{3}\varphi^3, \quad (5.61)$$

$$\frac{dU}{d\varphi} = m\varphi + g\varphi^2 \quad (5.62)$$

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = m + 2g\varphi. \quad (5.63)$$

Einsetzen in (5.58) liefert für die höchste Komponente

$$U(\Phi)|_{\theta\theta y \rightarrow x} = (m\varphi + g\varphi^2)F - \frac{1}{2}(m + 2g\varphi)(\psi\psi). \quad (5.64)$$

Insgesamt haben wir also mit (5.56) und (5.64) für die Lagrangedichte für die chiralen Superfelder (5.53)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) \\ & + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) \\ & + F^*F - (m\varphi + g\varphi^2)F - (m\varphi^* + g\varphi^{*2})F^*. \end{aligned} \quad (5.65)$$

5.4.3 Die Lagrangedichte ohne Hilfsfelder

Mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung kann man das Hilfsfeld F aus Glg. (5.65) entfernen. Aus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu F^*)} = 0 \quad (5.66)$$

folgt mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^*} = F - m\varphi^* - g\varphi^{*2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu F^*)} = 0 \quad (5.67)$$

die Bewegungsgleichung für das Hilfsfeld

$$F = m\varphi^* + g\varphi^{*2}. \quad (5.68)$$

In dieser Bewegungsgleichung treten keine Ableitungen auf. Hilfsfelder beschreiben daher keine Ausbreitung in Raum und Zeit. Mithilfe von (5.68) und seiner konjugiert-komplexen Form

$$F^* = m\varphi + g\varphi^2 \quad (5.69)$$

erhält man für die letzte Zeile in (5.65) $F^*F - F^*F - FF^* = -|F|^2$. Das Absolutquadrat von (5.68) ergibt

$$|F|^2 = m^2|\varphi|^2 + mg|\varphi|^2(\varphi + \varphi^*) + g^2|\varphi|^4. \quad (5.70)$$

Einsetzen in (5.65) liefert schließlich eine Form der Lagrangedichte, in der nur noch das komplexe skalare Feld $\varphi(x)$ und das Weyl-Spinorfeld $\psi(x)$ auftreten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 |\varphi|^2 \\
& - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) + \frac{m}{2} (\psi \psi + \bar{\psi} \bar{\psi}) \\
& + g(\varphi \psi \psi + \varphi^* \bar{\psi} \bar{\psi}) - mg |\varphi|^2 (\varphi + \varphi^*) - g^2 |\varphi|^4 .
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Man bezeichnet diese Lagrangedichte auch als on-shell. Nun zu den einzelnen Termen:

- ▷ Die erste Zeile beschreibt die freie Bewegungsgleichung des bosonischen Feldes $\varphi(x)$ mit der Masse m .
- ▷ Die mittlere Zeile beschreibt die freie Bewegung des fermionischen Feldes $\psi(x)$ mit der gleichen Masse m .
- ▷ Die Teilchen beschrieben durch φ und ψ sind die Superpartner aus dem chiralen Supermultiplett:

$$\begin{aligned}
\psi(x) & : & \text{Lepton, Quark ,} \\
\varphi(x) & : & \text{Slepton, Squark oder Higgs .}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

- ▷ Die letzte Zeile enthält die Wechselwirkungsterme. Bei den ersten beiden handelt es sich um den

$$\text{Yukawa-Term: } g(\varphi \psi \psi + \varphi^* \bar{\psi} \bar{\psi}) . \tag{5.73}$$

Durch ihn wird die Boson-Fermion-Wechselwirkung bestimmt, wobei g die Kopplungskonstante ist. Die letzten beiden Terme beschreiben die Selbstwechselwirkung des bosonischen Feldes. Die Stärke dieser Wechselwirkung ist durch die gleiche Kopplungskonstante g gegeben. Die letzten beiden Terme definieren das Superpotential, welches bei der Symmetriebrechung eine große Rolle spielt.

5.4.4 Die Lagrangedichte für Vektor-Superfelder

Die Lagrangedichte für Vektor-Superfelder ist mithilfe der supersymmetrischen Feldstärke $W_A(y, \theta, \bar{\theta})$ gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} W^A W_A |_{\theta\theta} y \rightarrow x + h.c. . \tag{5.74}$$

Die Lagrangedichte ist somit reell und ein Lorentzskalar, also eine bosonische Funktion. Unter Verwendung von (5.46) sowie (5.60) und

$$(\phi \sigma^{\mu\nu} \phi) = 0 \tag{5.75}$$

finden wir

$$\begin{aligned}
W^A W_A &= [i\lambda^A - 2d\theta^A - (\sigma^{\mu\nu} \theta)^A F_{\mu\nu} - (\theta\theta)(\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda})^A] \\
&\quad [i\lambda_A - 2d\theta_A - (\sigma^{\rho\sigma} \theta)_A F_{\rho\sigma} - (\theta\theta)(\sigma^\rho \partial_\rho \bar{\lambda})_A] \\
&= -(\lambda\lambda) - 2id(\theta\lambda) - i(\lambda\sigma^{\rho\sigma}\theta)F_{\rho\sigma} - i(\theta\theta)(\lambda\sigma^\rho \partial_\rho \bar{\lambda}) \\
&\quad - 2id(\theta\lambda) + 4d^2(\theta\theta) - i(\lambda\sigma^{\mu\nu}\theta)F_{\mu\nu} \\
&\quad + (\sigma^{\mu\nu} \theta)^A (\sigma^{\rho\sigma} \theta)_A F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - i(\theta\theta)(\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}) .
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Um diese Gleichung auszuwerten machen wir zunächst mithilfe von

$$\theta^A \theta^B = -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^{AB}(\theta\theta) \quad (5.77)$$

folgende Umformung

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu} \theta)^A (\sigma^{\rho\sigma} \theta)_A &= \sigma^{\mu\nu AB} \theta_B \theta_C \sigma^{\rho\sigma C}_A \\ &= -\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu AB} \tilde{\epsilon}_{BC} \sigma^{\rho\sigma C}_A (\theta\theta) \\ &= -\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu A}_C \sigma^{\rho\sigma C}_A (\theta\theta) \\ &= -\frac{1}{2} (\theta\theta) \text{Tr } \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma} . \end{aligned} \quad (5.78)$$

Die Spur kann weiter ausgewertet werden:

$$\text{Tr } \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} . \quad (5.79)$$

So haben wir z.B.

$$\begin{aligned} (\text{Tr } \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma}) F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} &= \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} + i F_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) \\ &= F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (5.80)$$

mit dem dualen Feldstärkentensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} . \quad (5.81)$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} W^A W_A &= -(\lambda\lambda) - 4id(\theta\lambda) - 2i(\lambda\sigma^{\mu\nu}\theta)F_{\mu\nu} + (\theta\theta) \left[-2i(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) \right. \\ &\quad \left. + 4d^2 - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (5.82)$$

Aus der höchsten Potenz von $W^A W_A$ folgt dann für die Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{i}{2}(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) + d^2 - \frac{1}{8}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{8}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{i}{2}(\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + d^2 - \frac{1}{8}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{8}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (5.83)$$

Die Lagrangedichte des Vektor-Superfeldes lautet schließlich

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2d^2 \quad (5.84)$$

Da die Felder λ , $F^{\mu\nu}$ und d alle eichinvariant sind, ist auch die Lagrangedichte eichinvariant. Allerdings enthält sie nur masselose Felder. Man kann formal einen Massenterm der Art

$$\mathcal{L}_m := m^2 V_{WZ}^2|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (5.85)$$

hinzufügen. Allerdings zerstört er die Eichinvarianz.

5.4.5 Supersymmetrische Eichtheorie

Globale SUSY-Eichtransformationen

Wir betrachten die Eichtransformation²

$$\Phi' = e^{-iq\Lambda(x)} \Phi, \quad (5.86)$$

wobei $\Lambda(x)$ ein Funktion ist, die von der Raumzeit x abhängt und q die Ladung bezeichnet. Wir fordern, daß das eichtransformierte Superfeld wieder ein chirales Superfeld ist, d.h.,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{A}}\Phi' &= \bar{D}_{\dot{A}}[e^{-iq\Lambda(x)}\Phi] \\ &= [\bar{D}_{\dot{A}}e^{-iq\Lambda(x)}]\Phi + e^{-iq\Lambda(x)}\bar{D}_{\dot{A}}\Phi \\ &= -iq[\bar{D}_{\dot{A}}\Lambda(x)]e^{-iq\Lambda(x)}\Phi = -iq\Phi'\bar{D}_{\dot{A}}\Lambda(x) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (5.87)$$

(Zur Erinnerung: Das chirale Superfeld ergab sich gerade aus der Forderung, daß $\bar{D}_{\dot{A}}\Phi = 0$.) Damit gilt also, daß

$$\bar{D}_{\dot{A}}\Lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda \text{ ist ein chirales Superfeld.} \quad (5.88)$$

Somit lautet die Eichtransformation für das chirale und das antichirale Superfeld

$$\begin{aligned} \Phi' &= \exp\{-iq\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})\}\Phi, \\ \Phi'^{\dagger} &= \Phi^{\dagger}\exp\{iq\Lambda^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta})\}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Der kinetische Term der Lagrangedichte bleibt bei dieser Eichtransformation jedoch nicht eichinvariant, da

$$\mathcal{L}'_{kin} = \Phi'^{\dagger}\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \Phi^{\dagger}e^{iq(\Lambda^{\dagger}-\Lambda)}\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \neq \Phi^{\dagger}\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}. \quad (5.90)$$

Um die Eichinvarianz zu garantieren, wird ein Feld eingeführt, das sich bei SUSY-Eichtransformationen wie folgt verhält:

$$V'(x, \theta, \bar{\theta}) = V(x, \theta, \bar{\theta}) + i[\Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) - \Lambda^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta})]. \quad (5.91)$$

Das entspricht der Eichtransformation (5.21), wenn man $\Phi = i\Lambda$ setzt. Der eichinvariante Ausdruck ist dann durch

$$\bar{\mathcal{L}}_{kin} = \Phi^{\dagger}e^{qV}\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad (5.92)$$

gegeben, da

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{kin} \rightarrow \bar{\mathcal{L}}'_{kin} &= \Phi'^{\dagger}e^{qV'}\Phi'|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &= \Phi^{\dagger}e^{iq\Lambda^{\dagger}}e^{q(V+i\Lambda-i\Lambda^{\dagger})}e^{-iq\Lambda}\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &= \Phi^{\dagger}e^{qV}\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

²Diese Eichtransformation hat nichts mit der *lokalen* SUSY-Transformation zu tun, bei der die spinoriellen Parameter durch Raumzeit-abhängige Parameter ersetzt werden. Die lokale Supersymmetrie führt zur Gravitation. Dies werden wir aber im Rahmen dieser Vorlesung nicht betrachten.

Das Prinzip der minimalen Kopplung

Um die einzelnen Komponenten der eichinvarianten Lagrangedichte $\bar{\mathcal{L}}_{kin}$ zu berechnen, zerlegen wir sie in die bereits bekannte kinetische Lagrangedichte $\mathcal{L}_{kin}$ und einen Anteil $\mathcal{L}_1$, der die Kopplung an das Eichfeld V beschreibt,

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_{kin} &= \Phi^\dagger e^{qV} \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &= \Phi^\dagger \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Phi^\dagger (e^{qV} - 1) \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_1 .\end{aligned}\quad (5.94)$$

Es gilt

$$e^{qV} = 1 + qV + \frac{q^2}{2}V^2 + \dots \quad (5.95)$$

Wir verwenden für das Eichfeld V das Vektor-Superfeld in der Wess-Zumino-Eichung, siehe Gleichungen (5.34), (5.37) und (5.38). Damit bricht die Reihe (5.95) ab, so daß

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \left(qV + \frac{q^2}{2}V^2 \right) \Phi^\dagger \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &= q \left[(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(d + \frac{q}{4}A_\mu A^\mu) \right] \Phi^\dagger \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} .\end{aligned}\quad (5.96)$$

Wir nehmen nun aus der Entwicklung (5.14) für $\Phi^\dagger \Phi$ nur die Terme, die zusammen mit dem Ausdruck in der eckigen Klammer die $(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$ Komponente bilden. Es gibt vier Kombinationen,

$$\begin{aligned}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu \Phi^\dagger \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \frac{1}{2}A_\mu [\psi\sigma^\mu\bar{\psi} + i(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*)] , \\ i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) \Phi^\dagger \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) \sqrt{2} \varphi(\bar{\theta}\bar{\psi})|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \varphi(\bar{\psi}\bar{\lambda}) , \\ i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda) \Phi^\dagger \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda) \sqrt{2} \varphi^*(\theta\psi)|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \varphi^*(\psi\lambda) , \\ (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(d + \frac{q}{4}A_\mu A^\mu) \Phi^\dagger \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= |\varphi|^2 \left(d + \frac{q}{4}A_\mu A^\mu \right) .\end{aligned}\quad (5.97)$$

Hier haben wir

$$(\theta\psi)(\theta\chi) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\chi\psi) \quad (5.98)$$

und

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\phi\theta)(\bar{\theta}\bar{\chi}) = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\phi\sigma^\nu\bar{\chi}) \quad (5.99)$$

verwendet. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_{kin} &= \mathcal{L}_{kin} + \frac{q}{2}A_\mu(\psi\sigma^\mu\bar{\psi}) + \frac{i}{2}qA^\mu(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) + \frac{i}{\sqrt{2}}q[\varphi^*(\psi\lambda) - \varphi(\bar{\psi}\bar{\lambda})] \\ &\quad + q \left(d + \frac{q}{4}A_\mu A^\mu \right) |\varphi|^2 ,\end{aligned}\quad (5.100)$$

wobei $\mathcal{L}_{kin}$ durch den Ausdruck (5.55) gegeben ist. Wir definieren die kovariante Ableitung durch

$$\text{kovariante Ableitung:} \quad D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}qA_\mu \quad (5.101)$$

Somit haben wir

$$(D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) + \frac{i}{2}qA^\mu(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*) + \frac{q^2}{4}A_\mu A^\mu|\varphi|^2 \quad (5.102)$$

und

$$(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu D_\mu\psi + \psi\sigma^\mu D_\mu^*\bar{\psi}) = (\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu^*\bar{\psi}) + iqA_\mu(\psi\sigma^\mu\bar{\psi}) . \quad (5.103)$$

Der jeweils erste Term auf der rechten Seite ist in $\mathcal{L}_{kin}$ enthalten. Und somit haben wir schließlich

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{kin} = & (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu D_\mu\psi + \psi\sigma^\mu D_\mu^*\bar{\psi}) \\ & + |F|^2 + \frac{i}{\sqrt{2}}q[\varphi^*(\psi\lambda) - \varphi(\bar{\psi}\bar{\lambda})] + qd|\varphi|^2 \end{aligned} \quad (5.104)$$

Die Lagrangedichte enthält also folgende Wechselwirkungsterme

- Die Wechselwirkung zwischen einem Photon und zwei Sfermionen (zur Erinnerung: das komplexe skalare Feld φ mit zwei Freiheitsgraden beschreibt Sleptonen und Squarks)

$$\frac{i}{2}qA^\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + h.c. . \quad (5.105)$$

- Die Wechselwirkung zwischen zwei Photonen und zwei Sfermionen

$$\frac{q^2}{4}A_\mu A^\mu|\varphi|^2 . \quad (5.106)$$

- Die Wechselwirkung zwischen einem Photon und zwei Fermionen (zur Erinnerung: bei dem Feld ψ handelt es sich um ein linkshändiges Weyl-Spinorfeld mit 4 Freiheitsgraden zur Beschreibung von Quarks und Leptonen)

$$qA_\mu(\psi\sigma^\mu\bar{\psi}) . \quad (5.107)$$

- Die Kopplung zwischen einem Gaugino (dem SUSY-Partner eines Eichbosons) und einem Fermion und Sfermion (zur Erinnerung: das komplexe Weyl-Spinorfeld λ mit 4 Freiheitsgraden beschreibt den SUSY-Partner des Eichbosons)

$$\frac{iq}{\sqrt{2}}\varphi^*(\psi\lambda) + h.c. . \quad (5.108)$$

Man beachte, daß alle Wechselwirkungsterme aufgrund von Supersymmetrie durch die gleiche Kopplungsstärke q beschrieben werden.

Minimale Kopplung in der Lagrangedichte für Vektor-Superfelder

Wenden wir nun das Prinzip der minimalen Kopplung auch in der Lagrangedichte für Vektor-Superfelder (5.84) an und machen die Ersetzung

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - \frac{i}{2}qA_\mu \quad (5.109)$$

Damit erhalten wir die Kopplung zwischen dem Eichfeld A und den gaugino Feldern λ

$$-\frac{q}{4}\lambda\sigma^\mu A_\mu\bar{\lambda} + h.c. . \quad (5.110)$$

Nicht-abelsche Eichtheorie

Das Prinzip der minimalen Kopplung können wir auf nicht-abelsche Eichtheorien ausweiten, indem wir die Ersetzung

$$i\partial_\mu \rightarrow iD_\mu = i\partial_\mu - g_S G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} - g W_\mu^b \frac{\sigma^b}{2} - g' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (5.111)$$

machen. Hier bezeichnen G_μ^a die Gluon-Eichfelder der $SU(3)_C$ -Eichtheorie, $a = 1, \dots, 8$, g_S die starke Kopplungskonstante und λ_a die 3×3 Gell-Mann Matrizen. Bei den Feldern W_μ^b , $b = 1, 2, 3$ und B_μ handelt es sich um die Eichfelder der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Eichgruppe, wobei g, g' die entsprechenden Kopplungskonstanten bezeichnen, σ^b die 2×2 Pauli-Matrizen und Y die schwache Hyperladungsquantenzahl. Die Wechselwirkungsterme in dem jeweils betroffenen Teil der Lagrangedichte ändern sich entsprechend.

5.4.6 Gesamte Lagrangedichte

Die gesamte Lagrangedichte ergibt sich also aus der kinetischen Lagrangedichte (5.104)

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{kin} = & (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi} \tilde{\sigma}^\mu D_\mu \psi + \psi \sigma^\mu D_\mu^* \bar{\psi}) \\ & + |F|^2 + \frac{i}{\sqrt{2}}q[\varphi^*(\psi\lambda) - \varphi(\bar{\psi}\bar{\lambda})] + qd|\varphi|^2, \end{aligned} \quad (5.112)$$

dem sich aus dem Superpotential (5.64)

$$U(\Phi)|_{\theta\theta} + h.c. = (m\varphi + g\varphi^2)F - \frac{1}{2}(m + 2g\varphi)(\psi\psi) \quad (5.113)$$

ergebenden Beitrag

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_U = & \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) \\ & - (m\varphi + g\varphi^2)F - (m\varphi^* + g\varphi^{*2})F^* \end{aligned} \quad (5.114)$$

und der Vektor-Superfeld-Lagrangedichte (5.84) mit minimaler Kopplung

$$\mathcal{L}_V = -\frac{i}{2}(\lambda\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\tilde{\sigma}^\mu D_\mu\lambda) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2d^2. \quad (5.115)$$

5.4.7 Die Lagrangedichte ohne Hilfsfelder

Wir können die Hilfsfelder F und d aus der Lagrangedichte mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (5.116)$$

entfernen. Für $\phi = F^*$ erhalten wir aus der kinetischen Lagrangedichte (5.112) und dem Superpotentialbeitrag (5.114)

$$F - \frac{dU}{d\varphi^*} = 0 \quad (5.117)$$

und analog für $\phi = F$

$$F^* - \frac{dU}{d\varphi} = 0, \quad (5.118)$$

so daß wir in (5.112) und (5.114) die Terme mit F, F^* durch

$$\mathcal{L}_F = - \left| \frac{dU}{d\varphi} \right|^2 = -|F|^2 \quad (5.119)$$

ersetzen können. Analog erhalten wir für $\phi = d$ aus der kinetischen Lagrangedichte (5.112) und der Vektor-Superfeld-Lagrangedichte (5.115)

$$4d + q|\varphi|^2 = 0, \quad (5.120)$$

so daß

$$qd|\varphi|^2 + 2d^2 = -\frac{q^2}{4}|\varphi|^4 + \frac{q^2}{8}|\varphi|^4 = -\frac{q^2}{8}|\varphi|^4 = -2d^2. \quad (5.121)$$

Die Beiträge der Hilfsfelder d und F fassen wir nun in ein Potential V zusammen:

$$V = 2d^2 + |F|^2. \quad (5.122)$$

Dabei sind (für allgemeine nicht-abelsche Eichtheorien)

$$|F|^2 = \left| \frac{dU}{d\varphi} \right|^2 \quad (5.123)$$

$$d^2 = \frac{1}{16} \sum_a |q_a \varphi t^a \varphi|^2, \quad (5.124)$$

wobei die t^a die Generatoren der jeweiligen Eichgruppe bezeichnen und q_a die entsprechenden Kopplungskonstanten.

Allgemein hat man für ein Potential, das von mehreren chiralen Superfeldern Φ_i ($i = 1, \dots, n$) abhängt, $U(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$, das Superpotential

$$W(\varphi, \varphi^*) := \sum_{i=1}^n |F_i|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right|^2. \quad (5.125)$$

Ebenso ist (mit der Redefinition $D \equiv 2d$)

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{2} \sum_A D^A D^A \\ D^A &= -g_A \sum_i \varphi_i T_{ij}^A \varphi_j. \end{aligned} \quad (5.126)$$

5.4.8 Die Lagrangedichte in integraler Form

Aus den vorigen Abschnitten ergibt sich also die Lagrangedichte der skalaren Felder zu $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} - \mathcal{L}_{pot}$, wobei

$$\mathcal{L}_{kin} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi_i^\dagger \Phi_i \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{pot} = \int d^2\theta U[\Phi] + h.c. . \quad (5.127)$$

Mithilfe der Deltafunktion können wir dies schreiben als

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} [\Phi_i^\dagger \Phi_i - (U[\Phi] \delta^2(\bar{\theta}) + h.c.)] . \quad (5.128)$$

Analog haben wir für die Lagrangedichte des Vektorsuperfeldes den integralen Ausdruck

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} [W^A W_A \delta^2(\bar{\theta}) + h.c.] . \quad (5.129)$$

Für die invariante Wirkung ergibt sich schließlich mit der Definition

$$\int d^8z := \int d^4x \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \quad (5.130)$$

die Form

$$S = \int d^8z \left\{ \Phi_i^\dagger \Phi_i - (U[\Phi] \delta^2(\bar{\theta}) + h.c.) + \frac{1}{4} (W^A W_A \delta^2(\bar{\theta}) + h.c.) \right\} . \quad (5.131)$$

5.5 Die Brechung der Supersymmetrie

Bevor im nächsten Kapitel die Lagrangedichte der minimalen supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells, des MSSM, betrachtet wird, soll hier die Brechung der Supersymmetrie behandelt werden.

Für ein allgemeines supersymmetrisches System gilt

- Gleiche Anzahl von Fermionen und Bosonen in einem Multiplett.
- Die Massen von Fermionen und Bosonen sind gleich.

Ferner ergibt sich aus der SUSY-Algebra $\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma_\mu P^\mu$, daß der supersymmetrische Grundzustand verschwindende Energie hat:

$$H = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1,2} [Q_\alpha + \bar{Q}_{\dot{\alpha}}]^2 \rightsquigarrow \langle 0|H|0 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1,2} [|\bar{Q}_{\dot{\alpha}}|0 \rangle|^2 + |Q_\alpha|0 \rangle|^2] \Rightarrow \quad (5.132)$$

$\langle H \rangle \gtrsim 0$ SUSY Grundzustand $\langle 0 H 0 \rangle = 0 \Leftrightarrow Q_\alpha 0 \rangle = 0, \bar{Q}_{\dot{\alpha}} 0 \rangle = 0$ für alle $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$.
--

Wenn also der supersymmetrische Grundzustand ungleich null ist, $\langle 0|H|0 \rangle \neq 0$, dann ist Supersymmetrie spontan gebrochen. Anders gesagt bedeutet dies, daß, wenn in dem Potential $V = 2d^2 + |F|^2$ entweder $d \neq 0$ oder $F \neq 0$, dann ist Supersymmetrie spontan gebrochen. Wir sprechen von

- $d \neq 0$: d -Brechung oder Fayet-Illiopoulos Brechung;
- $F \neq 0$: F -Brechung oder O’Raifeartaigh-Brechung.

Wenn der supersymmetrische Grundzustand null ist, also Supersymmetrie erhalten ist, dann bedeutet dies auch, daß die kosmologische Konstante null sein muß, $\Lambda_{cosmo} = 0$. Da wir bisher im Experiment noch keine supersymmetrischen Partnerteilchen zu den SM-Teilchen gefunden haben, gehen wir davon aus, daß Supersymmetrie gebrochen ist, die SUSY-Teilchen also nicht die gleiche Masse wie ihre SM-Partner haben. Allerdings kann die Supersymmetrie nicht in der sichtbaren Eigenwelt gebrochen sein. Der Grund ist die Ferrara-Girardello-Palumbo Massensummenregel. Diese besagt folgendes: Die Summe über die Massenquadrate der Teilchen mit Spin J eines Supermultipletts, multipliziert mit $(-1)^{2J}(2J+1)$ ergibt sich zu null:

$$\text{Ferrara-Girardello-Palumbo Summenregel: } \sum (-1)^{2J}(2J+1)m_J^2 = 0 \quad (5.133)$$

Angewandt beispielsweise auf das Supermultiplett, das das Elektron und seine SUSY-Partnerteilchen, das linkshändige und das rechtshändige Seletron enthält, ergibt dies

$$m_{\tilde{e}_L}^2 + m_{\tilde{e}_R}^2 - 2m_e^2 = 0. \quad (5.134)$$

Dies aber ist nicht kompatibel mit der Beobachtung, denn dann müßten entweder beide Selektren die gleiche Masse wie das Elektron haben oder aber eines der Selektren müßte leichter als das Elektron sein. Eine mögliche Lösung ist dadurch gegeben, daß die rechte Seite der Gleichung aufgrund beispielsweise eines Supergravitationssektors $\sim m_{3/2}^2$ nicht null ist. Es müssten also Materiet Terme addiert werden. Diese Materiet Terme sollten aber nicht direkt mit unserer Welt wechselwirken, um nicht das Standardmodell zu zerstören. D.h. sie würden in einem verborgenen Sektor, dem sogenannten "hidden sector" existieren. Die Brechung im hidden sector wird dann durch Botenteilchen, den "messenger particles" in unsere Welt kommuniziert. Je nach Realisierung sprechen wir von gravity mediated, gauge mediated, anomaly mediated SUSY-Brechung etc.. Phänomenologisch macht sich dies dann dadurch bemerkbar, daß zu der SUSY-Lagrangedichte eine soft-SUSY brechende Lagrangedichte dazugaddiert wird. Diese enthält SUSY-brechende Operatoren, die so beschaffen sind, daß sie nicht neue quadratische Divergenzen einführen. Daher die Namensgebung soft-SUSY Brechung. Es sei hier auch erwähnt, daß die sich ergebende Niederenergie-Phänomenologie qualitativ davon abhängt, wie die Messenger-Wechselwirkungen beschaffen sind.

Fassen wir nochmals zusammen:

- Spontane Symmetriebrechung findet in einem verborgenen Sektor statt, dem hidden sector.
- Die Symmetriebrechung wird durch Messengerteilchen in unsere Eigenwelt vermittelt.
- Dies führt in unserer Eigenwelt zu offensichtlicher SUSY-Brechung.

Die SUSY-Brechung wird durch eine soft-SUSY brechende Lagrangedichte beschrieben. Weiße SUSY-Brechung bedeutet

- Die Identität der zwischen den Yukawa- und Eichkopplungen der SM-Teilchen und den entsprechenden SUSY-Teilchen wird bewahrt.
- Die Massen der SUSY-Teilchen und der Partner-SM-Teilchen sind nicht mehr gleich.
- Die skalaren Kopplungen im Superpotential werden geändert.

Für die weiche SUSY-brechende Lagrangedichte, die renormierbar sein soll³, wird folgender Ansatz gemacht⁴

$\mathcal{L}_{soft} = -\frac{1}{2}M_i\bar{\lambda}_i\lambda_i$	für die Gauginos
$- m_{\tilde{f}}^2 \tilde{f} ^2 + \dots$	für Sfermionen, Higgs
$- U_2(\varphi) - U_3(\varphi) + h.c.$	Superpotential

Die Lagrangedichte parametrisiert das Unwissen über den Mechanismus, der zur SUSY-Brechung führt. Die Lagrangedichte enthält skalare Massenterme, Gaugino Massenterme für jede Eichgruppe und bilineare Terme sowie kubische skalare Kopplungen. Diese sind von der Form $B_{ij}\mu_{ij}S_iS_j$ und $A_{ijk}f_{ijk}S_iS_jS_k$, wobei die Terme $\mu_{ij}\hat{S}_i\hat{S}_j$ und $f_{ijk}\hat{S}_i\hat{S}_j\hat{S}_k$ im Superpotential auftreten. Da die Lagrangedichte nur Skalare und Gauginos enthält, bricht sie offensichtlich die Supersymmetrie und gibt die Massen für alle Skalare und die Gauginos.

5.5.1 SUSY Brechungsmechanismen

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, geschieht die Supersymmetriebrechung in einem versteckten Sektor (*hidden sector*). Die Teilchen im *hidden sector* haben keine oder nur eine sehr schwache Kopplung zu den Teilchen im sichtbaren Bereich (*visible sector*). Der *visible sector* enthält die SM Teilchen und ihre Superpartner. Verschiedene Brechungsmechanismen sind vorgeschlagen worden. Die am intensivsten untersuchten seien hier kurz vorgestellt.

Gravity Mediated Supersymmetry Breaking

Dieses Modell nimmt an, daß die SUSY brechenden Terme durch Gravitation oder andere Physik, die bei der Planckskala hinzukommt, hervorgerufen wird. Zu den diesen Modellen gehört beispielsweise “Minimal Supergravity” (mSUGRA).

Supersymmetrie wird in einem versteckten Sektor gebrochen und hat den Vakuumerwartungswert $\langle F \rangle$. Für die größten Massenterme m_{soft} in $\mathcal{L}_{soft}$ läßt sich folgende grobe Abschätzung machen. Da m_{soft} für $\langle F \rangle \rightarrow 0$ (keine SUSY Brechung) und $M_{Pl} \rightarrow \infty$ (keine Gravitation) verschwindet muß, ist

$$m_{soft} \sim \frac{\langle F \rangle}{M_{Pl}}. \quad (5.135)$$

³Die Forderung nach Renormierbarkeit läßt nur Terme zu, die Felddimension kleiner als 4 haben. Wir haben die Quantenfelddimensionen 1 für Bosonen, 1 für Skalare, 3/2 für Fermionen.

⁴Girardello und Grisaru haben die Formen der soft-SUSY brechenden Operatoren in einer allgemeinen Theorie klassifiziert und gezeigt, daß lineare Terme in einem skalaren Feld S_i , skalare Massen, bilineare oder trilineare Operatoren der Form S_iS_j oder $S_iS_jS_k$ und in Eichtheorien Gauginomassen, eine für jeden Faktor der Eichgruppe, die Supersymmetrie weich brechen.

Damit haben wir für typische Werte von m_{soft} von 100 GeV bis 1 TeV die Skala für die SUSY-Brechung im hidden sector $\sqrt{\langle F \rangle} \approx 10^{10} - 10^{11}$ GeV. Das Gravitino, die SUSY-Version des Gravitons, erhält durch die supersymmetrische Version des Higgsmechanismus eine Masse. Mit dem obigen Wert von $\sqrt{\langle F \rangle}$ ist es damit ein sehr schweres Teilchen. Diese Art der Kommunikation der SUSY-Brechung in den visible sector ist flavour-blind. Die SUSY-brechenden Terme sind damit ebenfalls flavour-blind.

Gauge Mediated Supersymmetry Breaking (GMSB)

Diese Brechung ist ebenfalls flavour-blind. Die SUSY-brechenden Terme werden hier durch elektroschwache und starke Eichwechselwirkungen hervorgerufen. Die Eichbosonen koppeln an sogenannte Messenger Teilchen, die einen Vakuumerwartungswert $\langle F \rangle$ haben. Die soft-SUSY brechenden Massenterme werden durch Schleifendiagramme erzeugt, die die Messenger-Teilchen enthalten, siehe Fig.5.1. Da sie verschwinden müssen, wenn die Messenger-Teilchen

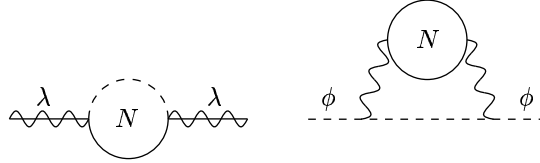


Abbildung 5.1: Schleifendiagramme zur Generierung der weichen SUSY brechenden Massenterme. N bezeichnet die Anzahl der Messengerteilchen, λ die SUSY Partner der Eichteilchen, ϕ skalare Teilchen.

sehr schwer sind ($M_{mess} \rightarrow \infty$) und wenn SUSY ungebrochen ist ($\langle F \rangle \rightarrow 0$), ergibt sich unter Berücksichtigung des loop-Faktors $\alpha_a/(4\pi)$

$$m_{soft} \sim \frac{\alpha_a \langle F \rangle}{4\pi M_{mess}} . \quad (5.136)$$

Wenn $\sqrt{\langle F \rangle}$ und M_{mess} ungefähr vergleichbar sind, wäre $\sqrt{\langle F \rangle} \sim 10^4 - 10^5$ GeV. Allgemein erwartet man in GMSB Modellen

$$10^4 < \sqrt{\langle F \rangle} < 10^9 \text{ GeV} . \quad (5.137)$$

Dies ist viel kleiner als in Gravity Modellen. Und damit hat man ein leichtes Gravitino, $m_{Grav} \sim \frac{\langle F \rangle}{M_{Pl}}$, das normalerweise mit dem leichtesten supersymmetrischen Teilchen (LSP) identifiziert wird.

Anomaly Mediated Supersymmetry Breaking (AMSB)

Die SUSY Brechung wird durch Schleifeneffekte erzeugt. Die konforme Anomalie erzeugt soft-SUSY brechende Terme. Die SUSY-Teilchen erhalten Masse durch die Brechung der Skaleninvarianz.

Kapitel 6

Das MSSM

Wir haben gesehen, daß das Standardmodell nicht allein als supersymmetrische Theorie formuliert werden kann. Wir haben nun alle Mittel, um eine supersymmetrische Version des Standardmodells zu konstruieren, und werden in diesem Kapitel die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells, das MSSM, behandeln. Im MSSM (= Minimal Supersymmetric Extension of the Standard Model) erhält jeder Freiheitsgrad des Standardmodells einen supersymmetrischen Partner-Freiheitsgrad, wir haben also $N = 1$ Supersymmetrie.

Das MSSM ist phänomenologisch die am detailliertesten studierte supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells. Inzwischen werden aber auch mehr und mehr aufwendige supersymmetrische Erweiterungen untersucht, wie etwa das NMSSM (Next-to-Minimal Supersymmetric Standard Model), das um ein Singlet im Higgspotential erweitert wird. Nichtsdestotrotz lassen sich viele phänomenologischen Beobachtungen und Rechnungen des MSSM mit mehr oder weniger geringem Aufwand auf die mehr oder weniger aufwendigen Erweiterungen übertragen. Es lohnt sich also, dieses Modell im Rahmen der Vorlesung ausführlich zu diskutieren, um so einen “einfachen” Einstieg in die Supersymmetrie und ihre Phänomenologie zu bekommen.

6.1 Die Lagrangedichte des MSSM

Zur Konstruktion des MSSM gehen wir wie folgt vor

1. Die Eichgruppe des SM wird gewählt, $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.
2. Der Materiegehalt der Theorie wird bestimmt, realisiert durch die chiralen Superfelder, mit Quantenzahlen genau wie im SM. Der Higgssektor soll aus zwei chiralen Superfeldern mit entgegengesetzter Hyperladung bestehen.
3. Die Form des Superpotentials wird gewählt.
4. Die SUSY Lagrangedichte wird gemäß den Vorschriften, die wir im vorigen Kapitel kennengelernt haben, berechnet. Wir erweitern die Lagrangedichte um alle möglichen weichen SUSY-Brechungsterme konsistent mit Eich- und Poincaré-Symmetrie.

Der Grund, weshalb wir im Higgssektor zwei chirale Superfelder mit entgegengesetzter Hyperladung wählen müssen, ist folgender: Das Superpotential enthält ein linkschirales Su-

perfeld¹

$$\hat{H}_2 = \begin{pmatrix} \hat{h}_2^+ \\ \hat{h}_2^0 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

welches die Hyperladung $Y = +1$ hat. Der Vakuumerwartungswert der skalaren Komponente des Superfeldes $\hat{h}_2^0$ verleiht den up-artigen Quarks Masse. Um den down-artigen Quarks Masse zu verleihen, benötigen wir ein Superfeld mit Hyperladungszahl $Y = -1$. Nun ist aber das rechtschirale Superfeld $\hat{H}_2^\dagger$, welches $Y = -1$ hat, im holomorphen Superpotential nicht erlaubt. Wir müssen daher ein zweites linkschirales Superfeld mit $Y = -1$,

$$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} \hat{h}_1^{0*} \\ -\hat{h}_1^- \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

hinzufügen. Dies löst sogleich ein weiteres Problem. Die Erweiterung des skalaren Higgsdubletts auf das Superfeld-Higgsdublett $\hat{H}_2$ nämlich führt weitere Fermionen ein. Deren Präsenz würde die im SM erfolgreiche Kancellierung der Dreiecksanomalien zerstören. Die Higgsinos des $Y = -1$ Dubletts jedoch haben gerade die richtigen Quantenzahlen, um die Anomalie-Kancellierung wiederherzustellen. Der Materie- und Higgs-Superfeld-Gehalt des MSSM für eine Generation mit ihrem Eichtransformationsverhalten und den schwachen Hyperladungen ist in Tabelle 6.1 zusammengefaßt, die Vektorfelder in Tabelle 6.1. Folgende Bemerkung

Superfeld	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	Teilcheninhalt
$\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{\nu}_{eL} \\ \hat{e}_L \end{pmatrix}$	1	2	-1	$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$
$\hat{E}^c$	1	1	2	$\bar{e}_R, \tilde{e}_R^*$
$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \hat{u}_L \\ \hat{d}_L \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$
$\hat{U}^c$	$\bar{\mathbf{3}}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\bar{u}_R, \tilde{u}_R^*$
$\hat{D}^c$	$\bar{\mathbf{3}}$	1	$\frac{2}{3}$	$\bar{d}_R, \tilde{d}_R^*$
$\hat{H}_2 = \begin{pmatrix} \hat{h}_2^+ \\ \hat{h}_2^0 \end{pmatrix}$	1	2	1	$\begin{pmatrix} H_2 \\ \tilde{h}_2 \end{pmatrix}$
$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} \hat{h}_1^{0*} \\ -\hat{h}_1^- \end{pmatrix}$	1	2*	-1	$\begin{pmatrix} H_1 \\ \tilde{h}_1 \end{pmatrix}$

Tabelle 6.1: Der Materie- und Higgs-Superfeld- und Teilchen-Inhalt des MSSM für eine Generation mit Eichtransformationsverhalten und schwacher Hyperladung.

ist hier angebracht. Da das Superpotential eine Funktion von linkschiralen Superfeldern ist, werden statt rechtshändiger Fermionen linkshändige ladungskonjugierte verwendet. D.h. wir verwenden z.B. für das Elektronsuperfeld

$$\Phi_{\hat{E}^c} = \varphi_{\bar{e}_R^*} + \sqrt{2}\theta\psi_{E_L^c} + (\theta\theta)F_{E^c}. \quad (6.3)$$

Und es gilt für die 2-komponentigen Spinoren

$$\bar{\psi}_{E_R} = -i\sigma^2\psi_{E_L} = \psi_{E_L^c}. \quad (6.4)$$

Superfeld	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	Teilcheninhalt
$\hat{G}^a$	8	1	0	$G^\mu, \tilde{g}$
$\hat{W}^i$	1	3	0	$W_i^\mu, \tilde{w}_i$
$\hat{B}$	1	1	0	$B^\mu, \tilde{b}$

Tabelle 6.2: Eich-Superfeld- und Teilchen-Inhalt des MSSM mit Eichtransformationsverhalten und schwacher Hyperladung.

Die Lagrangedichte des MSSM setzt sich aus der Lagrangedichte für die Eichfelder, $\mathcal{L}_{Eich}$, für die Materiefelder, $\mathcal{L}_{Mat}$, für die Hilfsfelder D und F , $\mathcal{L}_D$, $\mathcal{L}_F$, und für die weiche SUSY-Brechung, $\mathcal{L}_{soft}$ zusammen. Also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Eich} + \mathcal{L}_{Mat} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{soft} . \quad (6.5)$$

Wir haben für die Eichfeldlagrangedichte (vergleiche mit den ersten beiden Termen in der Lagrangedichte (5.115); beachte, daß die Gauginos hier in Form von Diracspinoren geschrieben sind und nicht in Form von Weyl-Spinoren wie in (5.115))

$$\mathcal{L}_{Eich} = -\frac{1}{4}G^{b\mu\nu}G_{\mu\nu}^b - \frac{1}{4}W^{a\mu\nu}W_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \text{Sp}[\tilde{g}i\not{D}\tilde{g}] + \text{Sp}[\tilde{W}i\not{D}\tilde{W}] + \frac{1}{2}\tilde{B}i\not{D}\tilde{B} , \quad (6.6)$$

$b = 1\dots 8$, $a = 1\dots 3$, wobei

$$iD_\mu = i\partial_\mu - gV_\mu \quad (6.7)$$

die kovariante Ableitung bezeichnet und

$$V_\mu = V_\mu^a T^a \quad (6.8)$$

die entsprechenden Eichfelder, T^a die zu der jeweiligen Eichgruppe gehörigen Generatoren, welche die Antikommutator-Relation

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c \quad (6.9)$$

erfüllen. f_{abc} bezeichnet die Strukturkonstanten, und wir haben im Fall der

$$\begin{aligned} \text{SU}(2): \quad T^a &= \frac{\tau^a}{2}, a = 1\dots 3 && \sim \text{Pauli-Matrizen} \\ \text{SU}(3): \quad T^a &= \frac{\lambda^a}{2}, a = 1\dots 8 && \sim \text{Gell-Mann-Matrizen} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Die Materie-Lagrangedichte ist durch

$$\mathcal{L}_{matter} = \sum_{\psi=f, \tilde{H}_i} \bar{\psi}i\not{D}\psi + \sum_{\phi=\tilde{f}, H_i} |D_\mu\phi|^2 + i \sum_{\psi, \phi, V} \frac{g_V}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_L T^a \tilde{V}^a \phi - \tilde{V}^a T^a \psi_L \phi^*] \quad (6.11)$$

gegeben. (Vergleiche mit der Lagrangedichte (5.112) ohne den Beitrag der Hilfsfelder F, d . Bei $\psi, \tilde{V}$ handelt es sich um 4-komponentige Spinoren.) Die Felder $H_i, \tilde{H}_i$ bezeichnen hier komplexe Higgsdubletts und ihre supersymmetrischen Entsprechungen. Im folgenden werden

¹Felder mit “Hut” bezeichnen im folgenden immer Superfelder. Die ohne “Hut” die Komponentenfelder.

wir immer von zwei komplexen Higgsdubletts ausgehen, also hier $i = 1, 2$.

Die Hilfsfeldlagrangedichte des D -Feldes,

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2} \sum_a |D_a^V|^2, \quad \text{mit } D_a^V = -g_a \sum_i \phi_i^* T^a \phi_i, \quad (6.12)$$

wobei i über die skalaren Felder der Theorie summiert. Diese Lagrangedichte folgt aus den d -Anteilen der Lagrangedichten (5.112) und (5.115) nach Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen und der Ersetzung $D = 2d$.

Die Superpotential-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_W = - \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right|^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} \overline{\psi_{iL}^c} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \psi_{jL} + h.c., \quad (6.13)$$

wobei i, j über die skalaren Felder $\phi_{i,j}$ und ihre Superpartner $\psi_{i,j}$ (4-komponentige Spinoren) der Theorie summiert. Der erste Teil der Lagrangedichte entspricht dem Anteil des Hilfsfeldes F nach Elimination mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen, vergleiche (5.125)². Der zweite Term entspricht der Verallgemeinerung der ersten Zeile in der Lagrangedichte (5.114) auf mehrere Felder, denn diese ist nichts anderes als³

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \psi \psi + h.c. \quad (6.14)$$

Das Superpotential W ist durch zwei Anteile gegeben, die beide renormierbar und eichinvariant sind. Wir haben

$$W = W_R + W_{\hat{R}}. \quad (6.15)$$

Dabei ist in Form von chiralen Superfeldern

$$W_R = - \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} \mu \hat{H}_1^i \hat{H}_2^j + \sum_{i,j=1}^2 \sum_{r,s=1}^3 \epsilon_{ij} [\lambda_{Lrs} \hat{H}_1^i \hat{L}_{jr} \hat{E}_s^c + \lambda_{Drs} \hat{H}_1^i \hat{Q}_{jr} \hat{D}_s^c + \lambda_{Urs} \hat{H}_2^i \hat{Q}_{jr} \hat{U}_s^c] \quad (6.16)$$

Die Indizes i, j sind $SU(2)_L$ -Dublett Indizes. Die Kontraktionen sind so gewählt, daß das Superpotential invariant unter $SU(2)_L$ -Transformationen ist. ϵ_{ij} ist der total antisymmetrische Tensor mit $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ und $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$. Das Superpotential ist ferner invariant unter $U(1)_Y$. Die λ 's sind Elemente der 3×3 Yukawa-Kopplungs-Matrizen mit den Indizes r, s , die den verschiedenen Generationen entsprechen. Bei $\hat{L}$ und $\hat{Q}$ handelt es sich um linkshändige Dubletts. Bei $\hat{U}$ handelt es sich um die rechtshändigen Singletts. Siehe auch Tabelle 6.1. Die Farbindizes an den Triplet-Superfeldern wurden unterdrückt. Off-Diagonalelemente in den Yukawa-Matrizen führen zu flavour-ändernden Kopplungen. Im allgemeinen können μ und λ komplex sein. Der Index c an den Feldern bezeichnet die Ladungskonjugation der entsprechenden Superfelder.

Der zweite Beitrag zum Superpotential ist in Form von chiralen Superfeldern durch

$$W_{\hat{R}} = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{r,s,t=1}^3 \epsilon_{ij} [\lambda_{rst} \hat{L}_{ir} \hat{L}_{js} \hat{E}_t^c + \lambda'_{rst} \hat{L}_{ir} \hat{Q}_{js} \hat{D}_t^c] + \lambda''_{rst} \hat{U}_r^c \hat{D}_s^c \hat{D}_t^c \quad (6.17)$$

²Hier wurde die Namensgebung leicht verändert, i.e. $W \equiv U$, $\phi_i \equiv \varphi_i$

³Beachte, daß sie hier in Form von 2-komponentigen Weyl-Spinoren formuliert ist.

gegeben. Auch dieser Beitrag ist renormierbar und eichinvariant. Jedoch verletzen dies Kopplungen Baryonzahl und Leptonzahl. Allerdings sind B - und L -Zahl verletzende Prozesse stark vom Experiment eingeschränkt. Beispielsweise würden Protonen extrem schnell zerfallen, wenn Baryonzahl- und Leptonzahlerhaltung beide verletzt sind. Denn

$$\begin{array}{ccccccc} P & \rightarrow & & \rightarrow & e^+ \Pi^0 \\ (u \underbrace{ud}) & \rightarrow & \underbrace{\tilde{d}^*} u & \rightarrow & \underbrace{e^+ (\bar{u} u)} & \sim \lambda'' \lambda' \stackrel{\text{exp}}{<} 10^{-27} \left(\frac{M_{\tilde{d}}}{100 \text{ GeV}} \right)^2. \end{array} \quad (6.18)$$

Dieser Beitrag zum Superpotential tritt nicht auf, wenn wir eine zusätzliche diskrete Symmetrie einführen, deren Erhaltung wir fordern. Wir fordern also die Erhaltung der R -Parität. Es handelt sich hier um eine multiplikative Quantenzahl, und es ist

$R\text{-Parität: } = +1 \quad \text{für SM Teilchen}$ $\phantom{R\text{-Parität: }} = -1 \quad \text{für SUSY Teilchen}$
--

Phänomenologisch sind die Konsequenzen:

- ◇ SUSY-Teilchen werden paarweise produziert.
- ◇ Es gib ein leichtestes SUSY-Teilchen, das LSP. Dieses ist stabil.

Im MSSM fordern wir R -Paritätserhaltung. Im SM tritt das Problem nicht auf, da solche Wechselwirkungen aufgrund von Eichsymmetrien nicht zu Operatoren der Dimension 4 beitragen können. Sie treten erst in Operatoren der Dimension 6 auf. Diese sind aber durch eine hohe Massenskala unterdrückt.

Wir benötigen noch die Lagrangedichte für die weiche SUSY-Brechung. Wir fordern, daß sie eichinvariant sein soll sowie auch CP -erhaltend. Damit haben wir (in Form von Komponentenfeldern)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{soft} = & -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 M_k \bar{\lambda}_k^a \lambda_k^a - m_1^2 |H_1|^2 - m_2^2 |H_2|^2 + B\mu \epsilon_{ij} (H_1^i H_2^j + h.c.) \\ & + \sum_{r,s=1}^3 \left[-M_{\tilde{Q}rs}^2 (\tilde{U}_{Lr}^\dagger \tilde{U}_{Ls} + \tilde{D}_{Lr}^\dagger \tilde{D}_{Ls}) - M_{\tilde{U}rs}^2 \tilde{U}_{Rr}^\dagger \tilde{U}_{Rs} - M_{\tilde{D}rs}^2 \tilde{D}_{Rr}^\dagger \tilde{D}_{Rs} + (\tilde{L}) \right. \\ & \left. + \frac{g}{\sqrt{2} M_W} \epsilon_{ij} \left(\frac{M_d}{\cos \beta} A_{Drs} H_1^i \tilde{Q}_r^j \tilde{D}_{Rs}^\dagger + \frac{M_u}{\sin \beta} A_{Urs} H_2^i \tilde{Q}_r^j \tilde{U}_{Rs} + (\tilde{L}) \right) + h.c. \right]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die Summe über $i, j = 1, 2$ ist implizit. Das Symbol $(\tilde{L})$ steht abkürzend für die entsprechenden Terme im Leptonsektor. Wir haben 3 reelle Gaugino-Massenparameter M_k entsprechend den drei Eichgruppen. Die Massenterme der Higgsdoublets m_1, m_2 sind reell. Nichtverschwindende off-Diagonalterme in den soft-SUSY brechenden Massenmatrizen $M_{\tilde{Q}}, \dots$ und den trilinearen Kopplungsmatrizen $A_D, \dots$ führen wiederum zu flavour-verletzenden Prozessen. Der Ursprung der Terme in $\mathcal{L}_{soft}$ bleibt unspezifiziert.

6.1.1 Die Parameter im MSSM

Das MSSM enthält in dieser Form mehr als 100 Parameter! Vermutlich wird es, wenn wir den Mechanismus, der der SUSY-Brechung zugrunde liegt, verstanden haben, möglich sein, die Menge dieser Parameter auf eine Handvoll wirklich grundlegender Parameter zu reduzieren. Bis dahin allerdings ist eines der Hauptziele der Modellbauer, phänomenologisch gültige aber ökonomische Modelle zu entwickeln, basierend auf wohl-motivierten Annahmen über die Physik an hohen Skalen, jedes mit nur wenigen Modellparametern. Es ist vernünftig, anzunehmen, daß, wenn eines Tages die SUSY-Teilchen entdeckt sind, die Bestimmung ihrer Eigenschaften dazu dienen wird, diese Modelle zu unterscheiden und dadurch den Weg zur zugrundeliegenden Theorie anzuzeigen.

Im folgenden werden wir einige vernünftige vereinfachende Annahmen machen, um die Flut an Parametern zu reduzieren. Da eine der Hauptmotivationen von SUSY war, das Hierarchieproblem zu lösen, fordern wir, um nicht ein neues Hierarchieproblem einzuführen, daß die SUSY brechenden Parameter sowie μ von der Ordnung der elektroschwachen Skala sind oder wenigstens nicht größer als ein paar TeV. Ferner würde der skalare Materiesektor des MSSM große Flavour-Verletzung sowohl in den Squark- als auch Sleptonensektoren enthalten, wenn die off-diagonalen Terme in den entsprechenden Massenmatrizen oder den Kopplungsmatrizen A vergleichbar mit den Diagonaltermen wären. Zudem enthält der skalare Sektor des MSSM viele neue Quellen für CP-Verletzung. Die SM-Teilchen könnten diese CP-Verletzung durch SUSY-Teilchen in den Schleifendiagrammen fühlen. Es gibt experimentelle Schranken an die Lepton-Flavour-Verletzung und die CP-Verletzung, die die Größe der entsprechenden Parameter stark einschränken. Beispielsweise würden große off-diagonale Beiträge zu den Sleptonmassenmatrizen zu großen Zerfallsraten für $\mu \rightarrow e\gamma$ führen.

Im folgenden seien zunächst der Einfachheit halber alle SUSY-Quellen für CP-Verletzung zu null gesetzt. Zudem nehmen wir an, daß die Squark- und Sleptonmatrizen sowie die Kopplungsmatrizen A in der gleichen Basis diagonal sind, in der die Fermion Yukawakopplungen diagonal sind. Es sei allerdings darauf hingewiesen, daß sich diese vereinfachenden Annahmen als falsch herausstellen könnten. Für einen einfachen Einstieg in die Phänomenologie des MSSM sind diese Annahmen jedoch nützlich.

6.2 Das skalare Potential des MSSM und EWSB

Ebenso wie im SM soll auch im MSSM die $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ Eichsymmetrie der Lagrangedichte im Grundzustand auf die $SU(3)_C \times U(1)_{em}$ Eichsymmetrie heruntergebrochen werden, so daß W - und Z -Bosonen und Fermionen über den Higgsmechanismus ihre Masse erhalten.

Um elektroschwache Symmetriebrechung (EWSB) zu untersuchen, müssen die Minima des skalaren Potentials im MSSM betrachtet werden. Das skalare Potential auf Bornniveau setzt sich aus drei Teilen zusammen

$$V_{MSSM} = V_F + V_D + V_{soft} . \quad (6.20)$$

Dabei sind, was den Higgssektor angeht,

$$V_F = |F|^2 = \sum_{i=1,2} \left| \frac{\partial W}{\partial H_i} \right|^2 = |\mu|^2 (|H_1|^2 + |H_2|^2) \quad (6.21)$$

$$V_D = \frac{1}{2}[D^a D^a + (D')^2] = \sum_a \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{g}{2} H_1^{i*} \sigma_{ij}^a H_1^j + \frac{g}{2} H_2^{i*} \sigma_{ij}^a H_2^j \right]^2 + \left[-\frac{1}{2} g' H_1^* H_1 + \frac{1}{2} g' H_2^* H_2 \right]^2 \right\} = \frac{g^2 + g'^2}{8} [|H_1|^2 - |H_2|^2]^2 + \frac{g^2}{2} |H_1^\dagger H_2|^2 \quad (6.22)$$

$$V_{soft} = m_{H_1}^2 |H_1|^2 + m_{H_2}^2 |H_2|^2 - B\mu \epsilon_{ij} (H_1^i H_2^j + h.c.) . \quad (6.23)$$

In der Gleichung (6.22) wurde die $SU(2)$ Identität

$$\sum_a \sigma_{ij}^a \sigma_{kl}^a = 2\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} \quad (6.24)$$

verwendet. Wir haben also für das Higgspotential

$$V_{Higgs} = (m_{H_1}^2 + |\mu|^2) |H_1|^2 + (m_{H_2}^2 + |\mu|^2) |H_2|^2 - B\mu \epsilon_{ij} (H_1^i H_2^j + h.c.) + \frac{g^2 + g'^2}{8} [|H_1|^2 - |H_2|^2]^2 + \frac{g^2}{2} |H_1^\dagger H_2|^2 \quad (6.25)$$

Und wir haben

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{0*} \\ -h_1^- \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2^+ \\ h_2^0 \end{pmatrix} . \quad (6.26)$$

Wir wollen nun elektroschwache Symmetriebrechung (EWSB) im MSSM untersuchen. Hierfür müssen wir die Minima des skalaren Potentials im MSSM untersuchen. Das volle skalare Potential beinhaltet noch viele andere Terme, die Squark- und Sleptonfelder enthalten. Wir betrachten diese hier nicht, da wir elektrische Ladung- oder Farb- oder Leptonzahlverletzende Grundzustände erhalten würden. Wir wollen nun, daß das Minimum des Potentials die elektroschwache Symmetrie zur elektromagnetischen herunterbricht, *i.e.* $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$. Die $SU(2)_L$ -Invarianz erlaubt zunächst einen möglichen Vakuumerwartungswert (VEV) für eine der schwachen Isospin Komponenten eines der skalaren Felder wegzurotieren, o.B.d.A. nehmen wir $h_1^- = 0$ im Minimum des Potentials. Man kann dann zeigen, daß ein Minimum des Potentials, welches $\partial V / \partial h_1^- = 0$ erfüllt, im Minimum auch $h_2^+ = 0$ haben muß. Das ist gut, denn es bedeutet, daß im Minimum des Potentials Elektromagnetismus ungebrochen ist, da die geladenen Komponenten der Higgsskalare keine VEVs bekommen können. Damit müssen wir also lediglich das Potential für die neutralen Felder minimieren. Es lautet

$$V_{scalar} = (m_{H_1}^2 + \mu^2) |h_1^0|^2 + (m_{H_2}^2 + \mu^2) |h_2^0|^2 - B\mu (h_1^0 h_2^0 + h.c.) + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) (|h_2^0|^2 - |h_1^0|^2)^2 . \quad (6.27)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\langle h_1^0 \rangle$, $\langle h_2^0 \rangle$ reell und positiv setzen. Um zu gewährleisten, daß das Minimum des Potentials nicht für $\langle h_1^0 \rangle = \langle h_2^0 \rangle = 0$ angenommen wird und also keine elektroschwache Symmetriebrechung stattfindet, fordern wir, daß am Ursprung ein lokales Maximum angenommen wird. Dies führt zu der Bedingung

$$(B\mu)^2 > (m_{H_1}^2 + \mu^2)(m_{H_2}^2 + \mu^2) . \quad (6.28)$$

Ferner soll das Potential ein stabiles Minimum haben und nicht nach unten hin unbeschränkt sein. Für die meisten Feldwerte ist das kein Problem, da der positiv definite quartische Term

das skalare Potential bei großen Feldwerten dominiert. Allerdings verschwindet der quartische Term in der Richtung des Feldraumes wo $\langle h_1^0 \rangle = \langle h_2^0 \rangle$. Dies nennt man eine D -flache Richtung im Feldraum, da der Term, der aus dem D -Potential stammt, verschwindet. Wir müssen fordern, daß das skalare Potential in dieser Richtung positiv ist. Das führt zu der Bedingung

$$m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2 + 2\mu^2 > 2B\mu . \quad (6.29)$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so entwickelt das Potential ein wohldefiniertes lokales Minimum, in dem die elektroschwache Symmetrie spontan gebrochen ist. Wir fordern nun, daß die Brechung kompatibel mit der Phänomenologie der EWSB $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ ist. Wir setzen

$$\langle h_1^0 \rangle \equiv \frac{v_1}{\sqrt{2}} \quad \langle h_2^0 \rangle \equiv \frac{v_2}{\sqrt{2}} . \quad (6.30)$$

Diese VEVs sind mit der bekannten Masse des Z -Bosons und den elektroschwachen Kopplungen verbunden,

$$v_1^2 + v_2^2 = v^2 = 4 \frac{m_Z^2}{g^2 + g'^2} = 246 \text{ GeV} . \quad (6.31)$$

Das Verhältnis der VEVs wird traditionell als

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1} . \quad (6.32)$$

geschrieben. Dieser Mischungswinkel β , dessen Wert von den gegenwärtigen Experimenten nicht festgelegt ist, spielt eine wichtige Rolle in phänomenologischen Studien des MSSM. Da wir $v_1 = v \cos \beta$ und $v_2 = v \sin \beta$ positiv und reell gewählt haben, haben wir $0 < \beta < \pi/2$. Wir können nun die Bedingungen $\partial V / \partial h_1^0 = \partial V / \partial h_2^0 = 0$ aufschreiben, für welche das Potential (6.27) ein Minimum annimmt und die Gleichungen (6.30) und (6.31) erfüllt:

$$\begin{aligned} (m_{H_1}^2 + \mu^2)h_1^0 - B\mu h_2^0 - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)h_1^0(|h_2^0|^2 - |h_1^0|^2) &= \\ \Rightarrow (m_{H_1}^2 + |\mu|^2) - B\mu \tan \beta + \frac{m_Z^2}{2} \cos(2\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} (m_{H_2}^2 + \mu^2)h_2^0 - B\mu h_1^0 + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)h_2^0(|h_2^0|^2 - |h_1^0|^2) &= \\ \Rightarrow (m_{H_2}^2 + |\mu|^2) - B\mu \cot \beta - \frac{m_Z^2}{2} \cos 2\beta &= 0 . \end{aligned} \quad (6.34)$$

Mithilfe dieser Bedingungen können wir $B\mu$ und $|\mu|$ eliminieren und durch $\tan \beta$ sowie m_Z ersetzen. Allerdings können wir nicht die Phase von μ bestimmen.

Bemerkungen:

Das “ μ Problem”: Wählen wir $|\mu|^2, B\mu, m_{H_1}^2, m_{H_2}^2$ als input Parameter, so erhalten wir

$$\sin(2\beta) = \frac{2B\mu}{m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2 + 2|\mu|^2} \quad (6.35)$$

$$m_Z^2 = \frac{|m_{H_1}^2 - m_{H_2}^2|}{\sqrt{1 - \sin^2(2\beta)}} - (m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2) - 2|\mu|^2 . \quad (6.36)$$

Wie wir von der Gleichung (6.36) ablesen können, sollten alle Input-Parameter innerhalb ein oder zwei Größenordnungen von m_Z^2 sein. Jedoch ist im MSSM μ ein SUSY respektierender Parameter, der im Superpotential auftritt, während $B\mu$, $m_{H_1}^2$, $m_{H_2}^2$ SUSY-brechende Parameter sind. Deshalb wird allgemein angenommen, daß das MSSM bei sehr hohen Energien erweitert werden muß, um einen Mechanismus einzuschließen, der den effektiven Wert von μ auf irgendeine Weise mit dem SUSY-Brechungsmechanismus in Verbindung setzt. Selbst wenn der Wert von μ durch weiche SUSY-Brechung gesetzt wird, sind die Kancellierungen in (6.36) oft bemerkenswert, wenn sie im Rahmen bestimmter Modelle ausgewertet werden, nachdem die Einschränkungen von direkten Suchen nach Higgsbosonen und Superpartnern berücksichtigt wurden. Im MSSM treten beispielsweise Kancellierungen im Prozentbereich auf. Dies könnte man als Hinweis auf nicht-minimale Modelle ansehen.

Die Higgsbosonmasse: Bisher haben wir das tree-level Potential des EWSB Sektors des MSSM betrachtet. Eine charakteristische Eigenschaft dieses Potentials ist, daß die quartischen Selbstwechselwirkungen der Higgsfelder einzig durch die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Eichkoppungen bestimmt werden. Dies impliziert, daß der Higgssektor des MSSM automatisch die Unitaritätsbeschränkungen erfüllt, in starkem Gegensatz zum SM, wo die Higgs selbstkopplung ein unabhängiger Parameter ist. Wie wir sehen werden, impliziert die Struktur der Selbstkopplungen im Higgssektor des MSSM eine *obere* Grenze von m_Z für die Masse des leichten Higgsbosons! Dies ist allerdings ein tree level Ergebnis, und höhere Ordnungskorrekturen ändern diesen Wert auf signifikante Weise.

6.3 Teilchenmassen im MSSM

Genau wie im SM werden also auch im MSSM die Teilchenmassen durch den Higgsmechanismus erzeugt, der gewährleistet, daß die Teilchen Masse erhalten, ohne die Symmetrien der Lagrangedichte zu verletzen. Im vorigen Kapitel haben wir dafür gesorgt, daß das MSSM Higgspotential die korrekte Form der EWSB liefert. Wir wollen nun die Teilchenmassen bestimmen.

6.3.1 Eichbosonen

Da das Vakuum nicht die $U(1)_{em}$ -Symmetrie spontan bricht, erhält das Photon keine Masse. Die $W^\pm$ und Z Bosonen erhalten ihre Masse durch den Higgsmechanismus. Wie im SM ergeben sich diese aus den kinetischen Termen der Higgsfelder:

$$\mathcal{L}_{kin}^{H_i} = \sum_i |D_\mu H_i|^2, \quad (6.37)$$

wobei D_μ die kovariante Ableitung bezeichnet,

$$D_\mu = (\partial_\mu + ig \frac{\tau^A}{2} W_{A\mu} + i \frac{g'}{2} B_\mu) \quad A = 1 \dots 3. \quad (6.38)$$

Die Vektormassen werden durch Entwicklung um die Vakuumerwartungswerte der beiden Higgsdoublets erhalten. Nach Drehung von den Wechseleffektzuständen auf die Masseneigenzustände

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{1\mu} \mp i W_{2\mu}) \quad (6.39)$$

$$A_\mu = \frac{g'W_{3\mu} + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (6.40)$$

$$Z_\mu = \frac{-gW_{3\mu} + g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (6.41)$$

finden wir für die Eichbosonmassen

$$m_A^2 = 0 \quad (6.42)$$

$$m_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{4}(v_1^2 + v_2^2) \quad (6.43)$$

$$m_{W^\pm}^2 = \frac{g^2}{4}(v_1^2 + v_2^2) . \quad (6.44)$$

Mit der Definition des schwachen Mischungswinkels $\tan \theta_W \equiv g'/g$ finden wir die SM-Relation $m_W = m_Z \cos \theta_W$ wieder.

6.3.2 Massive Fermionen

Die massiven Fermionen erhalten ihre Massen über die Yukawa-Wechselwirkungen im Superpotential (6.13). Insbesondere ergeben sich die Massen aus Termen der Form

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \psi_{iL}^c \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \psi_{jL} + h.c. \in \mathcal{L}_W . \quad (6.45)$$

Wir finden, indem wir in dem Superpotential die Kopplungen g individuell für die verschiedenen chiralen Superfelder Φ_i wählen, die Massenterme der Lagrangedichte

$$-g_f \frac{v_i}{\sqrt{2}} \bar{f} f = -m_f \bar{f} f , \quad (6.46)$$

wobei

$$v_i = v_1 \quad \text{für down-artige Fermionen} \quad (6.47)$$

$$v_i = v_2 \quad \text{für up-artige Fermionen} . \quad (6.48)$$

Die Neutrinomasse bleibt wie im SM masselos, da wir für sie keine Yukawa-Kopplung eingeführt haben.

6.3.3 Higgsbosonen

Im SM bleibt nach der EWSB von den vier Freiheitsgraden des komplexen Higgsdubletts ein physikalisches Higgsboson übrig. Die anderen drei Freiheitsgrade, die would-be Goldstonebosonen, werden “aufgegessen”, um die longitudinalen Komponenten der massiven Eichbosonen $W^\pm$ und Z zu bilden. Das Symmetriebrechungsmuster im MSSM ist dasselbe wie im SM. Wir erwarten daher das gleiche Set an would-be Goldstonebosonen. Da wir jedoch mit 2 komplexen Higgsdubletts gestartet sind, bleiben 2 geladene und 3 neutrale Spin-0 Bosonen

im physikalischen Spektrum des MSSM übrig. Um diese Zustände zu identifizieren und ihre Massen zu berechnen, müssen wir das folgende Higgspotential untersuchen

$$\begin{aligned}
V_{Higgs} = & (m_{H_1}^2 + |\mu|^2)(|h_1^0|^2 + |h_1^+|^2) + (m_{H_2}^2 + |\mu|^2)(|h_2^0|^2 + |h_2^+|^2) - B\mu(h_2^+ h_1^- + h_2^0 h_1^0 + h.c.) \\
& + \frac{g^2}{8} \{ (|h_2^+|^2 - |h_2^0|^2 + |h_1^0|^2 - |h_1^-|^2)^2 + 4|h_2^+|^2|h_2^0|^2 + 4|h_1^0|^2|h_1^-|^2 \\
& - 4(h_2^{+*} h_1^{-*} h_2^0 h_1^0 + h_2^{0*} h_1^{0*} h_2^+ h_1^-) \} \\
& + \frac{g'^2}{8} [|h_2^+|^2 + |h_2^0|^2 - |h_1^0|^2 - |h_1^-|^2] .
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Die neutralen Felder können in reelle und imaginäre Komponenten aufgespalten werden, d.h.

$$h_2^0 = h_{2R}^0 + i h_{2I}^0 \tag{6.50}$$

$$h_1^0 = h_{1R}^0 + i h_{1I}^0 . \tag{6.51}$$

Das skalare Potential kann dann als Funktion von 8 unabhängigen Feldern angesehen werden, $V(h_{2R}^0, h_{2I}^0, h_{1R}^0, h_{1I}^0, h_2^+, h_2^{+*}, h_1^-, h_1^{-*})$. Da wir an Anregungen des Vakuums interessiert sind, entwickeln wir das Higgspotential um sein Minimum gemäß

$$\begin{aligned}
V^{Higgs} = & V_{min} + \sum_{h_i} \frac{\partial V}{\partial h_i} \Big|_{h_i = \langle h_i \rangle} (h_i - \langle h_i \rangle) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{h_i, h_j} \frac{\partial^2 V}{\partial h_i \partial h_j} \Big|_{h_{i,j} = \langle h_{i,j} \rangle} (h_i - \langle h_i \rangle)(h_j - \langle h_j \rangle) + \dots .
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Hierbei bezeichnen die h_i die acht Felder des Potentials.

- Die einzigen nicht-verschwindenden VEVs sind $\langle h_{2R} \rangle = v_2$ und $\langle h_{1R} \rangle = v_1$.
- Die Koeffizienten der linearen Terme müssen alle verschwinden, da die Ableitungen am Minimum des Potentials ausgewertet werden.
- Die quadratischen Terme werden dann die Higgsboson-Massenterme liefern. Da es im allgemeinen Mischung gibt, werden sie Massenmatrizen bilden.
- Die Erhaltung der elektrischen Ladung bedeutet, daß es keine Mischung zwischen geladenen und neutralen Higgsfeldern geben kann, so daß es eine Massenmatrix für den geladenen Sektor und eine andere für den neutralen Sektor gibt.
- Da wir CP-Erhaltung angenommen haben, mischen die neutralen und imaginären Komponenten der neutralen Higgsbosonen ebenfalls nicht, so daß die 4×4 Massenmatrix im neutralen Sektor in zwei 2×2 Blöcke zerfällt.

Betrachten wir zunächst die Massenmatrizen, die die would-be Goldstonebosonen enthalten. Diese befinden sich im geladenen und im CP-ungeraden Sektor (d.h. die imaginären Komponenten) der neutralen Felder. Die Zustände orthogonal auf den Goldstonebosonen sind dann automatisch die physikalischen Zustände dieser Sektoren. Beginnen wir mit den geladenen Feldern. Die Lagrangedichte hat dann hierfür die Form

$$(h_2^{+*} h_1^-) \mathcal{M}_{H^\pm}^2 \begin{pmatrix} h_2^+ \\ h_1^{-*} \end{pmatrix} , \tag{6.53}$$

wobei

$$\mathcal{M}_{h^\pm}^2 = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_2^+ \partial h_2^{+*}} \right|_{h_i \rightarrow v_i} & \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_2^{+*} \partial h_1^{+*}} \right|_{h_i \rightarrow v_i} \\ \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_2^+ \partial h_1^+} \right|_{h_i \rightarrow v_i} & \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_1^+ \partial h_1^{+*}} \right|_{h_i \rightarrow v_i} \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

Die Ableitungen lassen sich leicht berechnen, da wir diese bei den VEVs der Higgsfelder auswerten wollen. D.h. wir können, nachdem die Ableitungen gebildet wurden, Terme, die proportional zu h_2^+ , h_1^- , h_{2I}^0 , h_{1I}^0 sind, fallen lassen, da diese Felder im Vakuum verschwinden. Beispielsweise finden wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_u^+ \partial h_u^{+*}} \right|_{h_i \rightarrow v_i} &= (m_{H_2}^2 + \mu^2) + \frac{g^2}{8}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{g'^2}{8}(v_2^2 - v_1^2) \\ &= B\mu \cot \beta + \frac{g^2}{4}v_1^2, \end{aligned} \quad (6.55)$$

wobei im letzten Schritt die Minimierungsbedingung (6.34) verwendet wurde, um $m_{H_2}^2 + \mu^2$ zugunsten von $B\mu$ zu ersetzen. Die quadratische Massenmatrix im geladenen Sektor ergibt sich schließlich zu

$$\mathcal{M}_{H^\pm}^2 = \begin{pmatrix} B\mu \cot \beta + \frac{g^2}{4}v_1^2 & -B\mu - \frac{g^2}{4}v_1v_2 \\ -B\mu - \frac{g^2}{4}v_1v_2 & B\mu \tan \beta + \frac{g^2}{4}v_2^2 \end{pmatrix}. \quad (6.56)$$

Hier wurde Glg. (6.33) verwendet, um im rechten unteren Eintrag $m_{H_1}^2 + \mu^2$ zu eliminieren. Die Eigenwerte dieser Matrix sind durch

$$m_{G^\pm} = 0 \quad \text{und} \quad m_{H^\pm} = B\mu(\cot \beta + \tan \beta) + m_W^2. \quad (6.57)$$

gegeben. In der unitären Eichung treten die Goldstonebosonen $G^\pm$ nicht auf. Sie werden absorbiert, um den $W^\pm$ -Bosonen Masse zu geben. Der andere Zustand $H^\pm$ verbleibt im Spektrum. Die Mischungsmatrix hat folgende Form

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{+*} \\ h_2^+ \end{pmatrix}. \quad (6.58)$$

Im neutralen Sektor ergibt sich für die Massenterme der imaginären Komponenten der neutralen Felder

$$\frac{1}{2}(h_{2I}^0 h_{1I}^0) \mathcal{M}_{h_{iI}^0} \begin{pmatrix} h_{2I}^0 \\ h_{1I}^0 \end{pmatrix}, \quad (6.59)$$

mit

$$\mathcal{M}_{h_{iI}^0} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_{2I}^{02}} \right|_{h_i \rightarrow v_i} & \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_{2I}^0 \partial h_{1I}^0} \right|_{h_i \rightarrow v_i} \\ \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_{2I}^0 \partial h_{1I}^0} \right|_{h_i \rightarrow v_i} & \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_{1I}^{02}} \right|_{h_i \rightarrow v_i} \end{pmatrix}. \quad (6.60)$$

Die Berechnung ergibt

$$\mathcal{M}_{h_{iI}^0}^2 = \begin{pmatrix} B\mu \cot \beta & B\mu \\ B\mu & B\mu \tan \beta \end{pmatrix}. \quad (6.61)$$

Die Eigenwerte sind

$$m_{G^0} = 0 \quad \text{und} \quad m_A^2 = B\mu(\cot\beta + \tan\beta) . \quad (6.62)$$

Vergleich der Eigenwerte für $H^\pm$ und A ergibt

$$m_{H^\pm}^2 = m_A^2 + m_W^2 , \quad (6.63)$$

so daß auf tree level gilt $m_{H^\pm} \geq m_W$ und $m_{H^\pm} \geq m_A$. Wiederum verschwindet das Goldstoneboson G^0 in der Lagrangedichte, die eine Masse für ein Z -Boson enthält. Das massive A Boson bleibt als *pseudoskalares*⁴ Higgsboson übrig. Die Mischungsmatrix für G^0 und A lautet

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{2I}^0 \\ h_{1I}^0 \end{pmatrix} . \quad (6.64)$$

Schließlich betrachten wir die Massenmatrix für die verbleibenden neutralen Skalare, h_{2R}^0 und h_{1R}^0 . Wir haben für die Massenmatrix der reellen Komponenten der neutralen Higgsskalare

$$\frac{1}{2}(h_{2R}^0 h_{1R}^0) \mathcal{M}_{h_i^0}^2 \begin{pmatrix} h_{2R}^0 \\ h_{1R}^0 \end{pmatrix} , \quad (6.65)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{h_i^0} &= \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_{2R}^2} \right|_{h_i \rightarrow v_i} & \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_{2R}^0 \partial h_{1R}^0} \right|_{h_i \rightarrow v_i} \\ \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_{2R}^0 \partial h_{1R}^0} \right|_{h_i \rightarrow v_i} & \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h_{1R}^2} \right|_{h_i \rightarrow v_i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_A^2 \cos^2 \beta + m_Z^2 \sin^2 \beta & -(m_A^2 + m_Z^2) \sin \beta \cos \beta \\ -(m_A^2 + m_Z^2) \sin \beta \cos \beta & m_A^2 \sin^2 \beta + m_Z^2 \cos^2 \beta \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (6.66)$$

Die Eigenwerte der Massenmatrix lauten

$$m_{h,H}^2 = \frac{1}{2}[(m_A^2 + m_Z^2) \mp \sqrt{(m_A^2 + m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta}] , \quad (6.67)$$

wobei h und H den leichteren und den schwereren der neutralen skalaren Masseneigenzustände bezeichnen. Die physikalischen Higgsskalare in Abhängigkeit von h_{2R}^0 und h_{1R}^0 lauten

$$\begin{pmatrix} h \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{2R}^0 \\ h_{1R}^0 \end{pmatrix} . \quad (6.68)$$

Dabei ist der Mischungswinkel α durch

$$\tan\alpha = \frac{(m_A^2 - m_Z^2) \cos 2\beta + \sqrt{(m_A^2 + m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta}}{(m_A^2 + m_Z^2) \sin 2\beta} \quad (6.69)$$

gegeben. Aus der Glg. (6.67) folgt

$$m_h \leq m_A |\cos 2\beta| \leq m_H \quad (6.70)$$

$$m_h \leq m_Z |\cos 2\beta| \leq m_H . \quad (6.71)$$

⁴Daß es sich um ein pseudoskalares Higgs handelt, wird man an den Kopplungen an die massiven Fermionen sehen. Das A bleibt auch jenseits des Bornniveaus ein Eigenzustand, da CP erhalten ist und das CP-ungerade A nicht mit den CP-geraden skalaren Higgsbosonen mischen kann.

Wir haben also folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} M_h &< m_Z, M_A \\ M_H &> m_Z, M_A \\ M_{H^\pm} &> M_A, m_W. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Insbesondere ist also die leichteste Higgsmasse kleiner als die Z -Bosonmasse. Wir werden allerdings sehen, daß die Strahlungskorrekturen dafür sorgen, daß m_h deutlich größer als m_Z wird.

6.3.4 Gluinos

Das Gluino, der SUSY-Partner des Gluons, ist das einzige Farboktett-Fermion. Da die $SU(3)_C$ nicht gebrochen ist, kann das Gluino nicht mit anderen Fermionen mischen. Sein Massenterm ergibt sich also lediglich aus dem weichen SUSY-brechenden Gaugino Massenterm

$$-\frac{1}{2}M_3\tilde{g}\tilde{g}. \quad (6.73)$$

Die Masse des Gluinos ist also auf tree level $m_{\tilde{g}} = |M_3|$.

6.3.5 Charginos und neutralinos

Die Brechung der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ sorgt dafür, daß Zustände mit derselben elektrischen Ladung, Farbe und demselben Spin mischen. Das bedeutet, daß die Gauginos und Higgsinos nicht physikalische Teilchen mit definierter Masse sein können. Vielmehr mischen die neutralen Felder $\psi_{h_1^0}, \psi_{h_2^0}, \lambda_3$ und λ_0 , um neutrale Fermion-Masseneigenzustände bilden, die *Neutralinos*. Die negativ geladenen Felder $\psi_{h_2^-}, \psi_{h_1^-}$ und die Linearkombination $(\lambda_1 + i\lambda_2)/\sqrt{2}$ mischen, um die negativen *Charginos* zu bilden.

Wir arbeiten zunächst die Form der Chargino- und Neutralino-Massenmatrizen aus und diagonalisieren diese dann, um die physikalischen Charginos und Neutralinos zu identifizieren. Die Massenmatrizen erhalten folgende supersymmetrische Beiträge

- aus dem Superpotential den Higgsino Massenterm μ
- einen SUSY brechenden Beitrag von den Gaugino Massen
- einen Beitrag aus der EWSB.

Der SUSY Beitrag aus den Superpotentialtermen

$$\mu(\hat{h}_2^0\hat{h}_1^0 + \hat{h}_2^+\hat{h}_1^-) \quad (6.74)$$

liefert bilineare fermionischen Terme

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\bar{\psi}_i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\hat{\phi}_i\partial\hat{\phi}_j}\right)_{\hat{\phi}=\phi}P_L\psi_j + h.c., \quad (6.75)$$

⁵Dies ist der Superpartner des vorher definierten Feldes W_μ^- .

mit folgender Form

$$-\frac{\mu}{2}[\bar{\psi}_{h_2^0}\psi_{h_1^0} + \bar{\psi}_{h_1^0}\psi_{h_2^0}] - \frac{\mu}{2}[\bar{\psi}_{h_2^+}\psi_{h_1^-} + \bar{\psi}_{h_1^-}\psi_{h_2^+}] . \quad (6.76)$$

Gaugino-higgsino bilineare Terme aus elektroschwacher Symmetriebrechung kommen aus

$$-g_A\phi_i^*t_A\bar{\lambda}_AP_L\psi_i + h.c. , \quad (6.77)$$

wobei ϕ_i die Higgsfelder bezeichnen, die VEVs erhalten. Diese Beiträge können folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{aligned} &-(h_2^{+\dagger}, h_2^{0\dagger}) \begin{pmatrix} g\bar{\lambda}_3 + g'\bar{\lambda}_0 & g\bar{\lambda}_1 - ig\bar{\lambda}_2 \\ g\bar{\lambda}_1 + ig\bar{\lambda}_2 & -g\bar{\lambda}_3 + g'\bar{\lambda}_0 \end{pmatrix} P_L \begin{pmatrix} \psi_{h_2^+} \\ \psi_{h_2^0} \end{pmatrix} \\ &-(h_1^{-\dagger}, h_1^{0\dagger}) \begin{pmatrix} -g\bar{\lambda}_3 - g'\bar{\lambda}_0 & -g\bar{\lambda}_1 - ig\bar{\lambda}_2 \\ -g\bar{\lambda}_1 + ig\bar{\lambda}_2 & g\bar{\lambda}_3 - g'\bar{\lambda}_0 \end{pmatrix} P_L \begin{pmatrix} \psi_{h_1^-} \\ \psi_{h_1^0} \end{pmatrix} + h.c. . \end{aligned} \quad (6.78)$$

Beiträge zu den Gaugino-Higgsino Massen aus EWSB treten auf, wenn die Higgsbosonfelder VEVs haben. Die entsprechenden Terme in (6.78), die geladene Higgsinos enthalten, lauten

$$\begin{aligned} &-\frac{gv_2}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{h_2^+}P_R(\lambda_1 - i\lambda_2) - \frac{gv_1}{\sqrt{2}}(-\bar{\lambda}_1 + i\bar{\lambda}_2)P_L\psi_{h_1^-} + h.c. \\ &= -\frac{gv_2}{\sqrt{2}}(\bar{\lambda}_1 - i\bar{\lambda}_2)P_R\psi_{h_2^+} + \frac{gv_1}{\sqrt{2}}(\bar{\lambda}_1 - i\bar{\lambda}_2)P_L\psi_{h_1^-} + h.c. , \end{aligned} \quad (6.79)$$

wobei der erste Term der ersten Zeile aus dem hermitesch konjugierten Anteil von (6.78) stammt. Wir definieren dann Diracfelder für das negativ geladenen Gaugino

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\sqrt{2}} \quad (6.80)$$

und ein negativ geladenes Higgsino

$$\tilde{\chi} = P_L\psi_{h_1^-} - P_R\psi_{h_2^+} , \quad (6.81)$$

in denen sich dann die geladenen und neutralen Gaugino-Higgsino Massterme in (6.78) schreiben lassen als

$$\begin{aligned} &gv_2\bar{\lambda}P_R\tilde{\chi} + gv_1\bar{\lambda}P_L\tilde{\chi} + h.c. \\ &+ \frac{gv_2}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}_3\psi_{h_2^0} - \frac{g'v_2}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}_0\psi_{h_2^0} - \frac{gv_1}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}_3\psi_{h_1^0} + \frac{g'v_1}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}_0\psi_{h_1^0} . \end{aligned} \quad (6.82)$$

Schließlich ist der Beitrag von soft SUSY brechenden Gauginomassen⁶

$$-\frac{1}{2}M_1\bar{\lambda}_0\lambda_0 - \frac{1}{2}M_2\bar{\lambda}_3\lambda_3 - M_2\bar{\lambda}\lambda . \quad (6.83)$$

Damit erhalten wir also aus den Gleichungen (6.76), (6.82) und (6.83) für den Gaugino-Higgsino Massenterm

$$\mathcal{L}_{neutralino} = -\frac{1}{2}(\bar{\psi}_{h_2^0}, \bar{\psi}_{h_1^0}, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_0)\mathcal{M}_{neutral} \begin{pmatrix} \psi_{h_2^0} \\ \psi_{h_1^0} \\ \lambda_3 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (6.84)$$

⁶Die Felder λ_3 und λ werden beide mit der gleichen soft SUSY brechenden Masse M_2 assoziiert, da sie zu gleichen Eichgruppe gehören.

mit

$$\mathcal{M}_{neutral} = \begin{pmatrix} 0 & \mu & -\frac{gv_2}{\sqrt{2}} & \frac{g'v_2}{\sqrt{2}} \\ \mu & 0 & \frac{gv_1}{\sqrt{2}} & -\frac{g'v_1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{gv_2}{\sqrt{2}} & \frac{gv_1}{\sqrt{2}} & M_2 & 0 \\ \frac{g'v_2}{\sqrt{2}} & -\frac{g'v_1}{\sqrt{2}} & 0 & M_1 \end{pmatrix} \quad (6.85)$$

und

$$\mathcal{L}_{chargino} = -(\bar{\lambda}, \bar{\tilde{\chi}})(\mathcal{M}_{charge}P_L + \mathcal{M}_{charge}^T P_R) \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}, \quad (6.86)$$

mit

$$\mathcal{M}_{charge} = \begin{pmatrix} M_2 & -gv_1 \\ -gv_2 & -\mu \end{pmatrix}. \quad (6.87)$$

Die physikalischen Charginos und Neutralinos sind die Eigenzustände dieser Massenmatrizen. Die Neutralino Massenmatrix ist reell und hermitesch und kann durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert werden. Die Chargino-Massenmatrix ist nicht symmetrisch, so daß die Chargino-Massenterme γ_5 -abhängig sind. Diese Abhängigkeit kann eliminiert werden, indem man separat die links- und rechtschiralen Komponenten rotiert.

Diagonalisierung der Charginos

Wir wenden also unterschiedliche Unitaritätstransformationen für die links- und rechtshändigen Komponenten der Felder an:

$$P_L \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = U P_L \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_2 \\ \tilde{\chi}_1 \end{pmatrix} \quad P_R \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = V P_R \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_2 \\ \tilde{\chi}_1 \end{pmatrix}, \quad (6.88)$$

wobei U und V 2×2 Unitaritätsmatrizen sind. Dann haben wir

$$\begin{aligned} & -(\bar{\tilde{\chi}}_2 \bar{\tilde{\chi}}_1) V^\dagger \mathcal{M}_{charge} U P_L \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_2 \\ \tilde{\chi}_1 \end{pmatrix} \\ & -(\bar{\tilde{\chi}}_2 \bar{\tilde{\chi}}_1) U^\dagger \mathcal{M}_{charge}^T V P_R \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_2 \\ \tilde{\chi}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Die Matrizen U und V werden so konstruiert, daß diese Massenterme diagonal sind, d.h.

$$\begin{aligned} V^\dagger \mathcal{M}_{charge} U &= \begin{pmatrix} m_{\tilde{\chi}_2} & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\chi}_1} \end{pmatrix} \equiv \mathcal{M}_D \quad \text{und} \\ U^\dagger \mathcal{M}_{charge}^T V &= \begin{pmatrix} m_{\tilde{\chi}_2} & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\chi}_1} \end{pmatrix} \equiv \mathcal{M}_D^\dagger, \end{aligned} \quad (6.90)$$

wobei $m_{\tilde{\chi}_1}$ und $m_{\tilde{\chi}_2}$ reelle (aber nicht notwendigerweise positive) Zahlen sind. U ist die Unitaritätsmatrix, die die hermitesche Matrix $\mathcal{M}_{charge}^T \mathcal{M}_{charge}$ diagonalisiert, während V die entsprechende Matrix ist, die $\mathcal{M}_{charge} \mathcal{M}_{charge}^T$ diagonalisiert. Die Eigenwerte der Matrix $\mathcal{M}_{charge}^T \mathcal{M}_{charge}$ (die die gleichen sind wie die der Matrix $\mathcal{M}_{charge} \mathcal{M}_{charge}^T$) sind natürlich reell und positiv. Da

$$\mathcal{M}_D^\dagger \mathcal{M}_D = U^\dagger (\mathcal{M}_{charge}^T \mathcal{M}_{charge}) U \quad (6.91)$$

sind diese Eigenwerte gerade $m_{\tilde{\chi}_{1,2}}^2$ und durch

$$m_{\tilde{\chi}_{1,2}}^2 = \frac{1}{2}[(\mu^2 + M_2^2 + 2m_W^2) \mp \xi] \quad (6.92)$$

gegeben, wobei

$$\xi^2 = (M_2^2 - \mu^2)^2 + 4m_W^2[m_W^2 \cos^2 2\beta + \mu^2 + M_2^2 - 2\mu M_2 \sin 2\beta] . \quad (6.93)$$

Per Definition ist $\tilde{\chi}_1^\pm$ leichter als $\tilde{\chi}_2^\pm$ ⁷. Folgende Grenzfälle sind interessant:

Grenzfälle: $\mu, M_2 \gg m_W$ bzw. $\mu \ll M_2$

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\chi}_{1,2}^\pm} &= M_2 - \frac{m_W^2(M_2 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} \\ m_{\tilde{\chi}_{2,1}^\pm} &= |\mu| + \frac{m_W^2(|\mu| + \epsilon M_2 \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} \quad \epsilon = \text{sign}(\mu) . \end{aligned} \quad (6.94)$$

- $|\mu| \gg M_2$: $\tilde{\chi}_1^\pm$ gaugino-artig, $\tilde{\chi}_2^\pm$ higgsino-artig.
- $|\mu| \ll M_2$: $\tilde{\chi}_1^\pm$ higgsino-artig, $\tilde{\chi}_2^\pm$ gaugino-artig.
- $\mu \sim M_2, \tan \beta \sim 1$: $M_{\tilde{\chi}_{1,2}^\pm} \sim \sqrt{M_2^2 + m_W^2}$ degeneriert.

Diagonalisierung der Neutralinos

Die Neutralinomassenmatrix hat reelle Eigenwerte, da sie hermitesch ist. Sie kann durch eine Unitaritätsmatrix diagonalisiert werden. Die Diagonalmatrix zwar reelle Eigenwerte, aber nicht notwendigerweise positive. Es sei hier darauf verwiesen, daß für ein Fermionsystem die Massen nicht durch die Eigenwerte der “Fermionmassenmatrix” gegeben sind. Stattdessen sind die Eigenwerte der Massenmatrix mal ihrer hermitesch adjungierten die Quadrate der Fermionmassen. Die Neutralinomassenmatrix kann analytisch diagonalisiert werden. Die Masseneigenzustände werden mit $\tilde{\chi}_1^0, \tilde{\chi}_2^0, \tilde{\chi}_3^0, \tilde{\chi}_4^0$ bezeichnet. In dieser Reihenfolge vom leichtesten bis zum schwersten. Da die Formeln für die Massen recht lang sind, werden sie hier nicht angegeben, sondern nur Grenzfälle betrachtet.

Grenzfälle: $\mu, M_1, M_2 \gg m_Z$

$$m_{\tilde{\chi}_1^0} = M_1 - \frac{m_Z^2 s_W^2 (M_1 + \mu s_\beta)}{\mu^2 - M_1^2} \quad (6.95)$$

$$m_{\tilde{\chi}_2^0} = M_2 - \frac{m_Z^2 c_W^2 (M_1 + \mu s_\beta)}{\mu^2 - M_2^2} \quad (6.96)$$

$$m_{\tilde{\chi}_3^0} = |\mu| + \frac{m_Z^2 (1 - \epsilon s_{2\beta})(|\mu| + M_1 c_W^2 + M_2 s_W^2)}{2(|\mu| + M_1)(|\mu| + M_2)} \quad (6.97)$$

$$m_{\tilde{\chi}_4^0} = |\mu| + \frac{m_Z^2 (1 + \epsilon s_{2\beta})(|\mu| - M_1 c_W^2 - M_2 s_W^2)}{2(|\mu| - M_1)(|\mu| - M_2)} . \quad (6.98)$$

⁷Bisher wurde $\pm$ and den charginos immer unterdrückt. Im folgenden wird es beibehalten, um die $\tilde{\chi}_{1,2}^\pm$ von den Neutralinos zu unterscheiden.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_1^0 &\sim \lambda_0 && \text{Bino-artig} \\
\tilde{\chi}_2^0 &\sim \lambda_3 && \text{Wino-artig} \\
\tilde{\chi}_{3,4}^0 &\sim \frac{h_1^0 \pm h_2^0}{\sqrt{2}} \\
m_{\tilde{\chi}_2^0} &\sim m_{\tilde{\chi}_1^\pm} .
\end{aligned} \tag{6.99}$$

Und

- $|\mu| \gg M_1, M_2$: LSP gaugino-artig.
- $|\mu| \ll M_1, M_2$: LSP Higgsino-artig; $m_{\tilde{\chi}_1^0} \sim m_{\tilde{\chi}_2^0} \sim m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$.

6.3.6 Squarks und Sleptonen

Squarks und Sleptonen erhalten zu ihren Massen Beiträge aus vier Quellen. Anders als die Fermionen, deren Massenterme allein aus den Superpotential Yukawa-Wechselwirkungen stammen. Im folgenden werden diese Terme für die top Squarks angegeben. Die entsprechenden Terme für die anderen Squarks und Sleptonen können dann entsprechend gefunden werden.

Superpotential-Terme Der relevante Beitrag aus dem Superpotential ist

$$\mu \hat{h}_2^0 \hat{h}_1^0 + f_t \hat{t} \hat{h}_2^0 \hat{T}^c . \tag{6.100}$$

Mit

$$- \sum_i \left| \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\phi}_i} \right|_{\hat{\phi}=\phi}^2 \tag{6.101}$$

erhalten wir aus

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{t}} = f_t \hat{h}_2^0 \hat{T}^c \quad \text{und} \tag{6.102}$$

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{T}^c} = f_t \hat{t} \hat{h}_2^0 \tag{6.103}$$

nach der Ersetzung $h_2^0 \rightarrow v_2/\sqrt{2}$

$$-m_t^2 \tilde{t}_L^\dagger \tilde{t}_L - m_t^2 \tilde{t}_R^\dagger \tilde{t}_R . \tag{6.104}$$

Das Superpotential liefert außerdem noch aus $|\partial \hat{W} / \partial \hat{h}_2^0|^2$ nach der Ersetzung $h_1^0 \rightarrow v_1/\sqrt{2}$ den Beitrag

$$-(\mu m_t \cot \beta)(\tilde{t}_L^\dagger \tilde{t}_R + \tilde{t}_R^\dagger \tilde{t}_L) . \tag{6.105}$$

Diese beiden Terme verschwinden, falls die zugehörige Quark-Yukawa-Kopplung null ist.

Soft SUSY brechende skalare Massen: Diese Terme stammen aus

$$-\tilde{Q}_i^\dagger m_{Qij}^2 \tilde{Q}_j - \tilde{u}_{Ri}^\dagger m_{Uij}^2 \tilde{u}_{Rj} \tag{6.106}$$

und liefern

$$-m_{\tilde{t}_L}^2 \tilde{t}_L^\dagger \tilde{t}_L - m_{\tilde{t}_R}^2 \tilde{t}_R^\dagger \tilde{t}_R . \quad (6.107)$$

Dabei gibt es für jede Generation von linkshändigen Squarks nur einen soft SUSY brechenden Massenterm, d.h.

$$m_{\tilde{t}_L} = m_{\tilde{b}_L} = m_{Q_3} , \quad \text{etc.} \quad (6.108)$$

Diese Terme stammen aus der SUSY Brechung und sind da, egal ob die elektroschwache Symmetrie spontan gebrochen ist oder nicht.

Soft SUSY brechende trilineare Terme: Soft SUSY brechende Wechselwirkungen von Squarks mit neutralen Higgsbosonen

$$A_t f_t \tilde{t}_L h_2^0 \tilde{t}_R^\dagger + h.c. \quad (6.109)$$

liefern die Squarkmischungsterme

$$-(-A_t m_t)(\tilde{t}_L^\dagger \tilde{t}_R + \tilde{t}_R^\dagger \tilde{t}_L) , \quad (6.110)$$

nachdem das Higgsfeld durch seinen VEV ersetzt wurde. Ebenso wie die Superpotential Terme verschwinden diese Terme, falls die EW Symmetrie nicht gebrochen ist.

D-Term Beiträge: Diese Terme stammen aus

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_A \left| \sum_i \phi_i^\dagger g_\alpha t_{\alpha A} \phi_i \right|^2 \quad \rightsquigarrow \\ & -\frac{1}{2} g^2 |\tilde{Q}^\dagger T_{3Q} \tilde{Q} + H_2^\dagger \frac{\tau_3}{2} H_2 + H_1^\dagger (-\frac{\tau_3}{2}) H_1|^2 \\ & -\left(\frac{g'}{2}\right)^2 |H_2^\dagger Y_{H_2} H_u + H_1^\dagger Y_{H_1} H_1 + \tilde{Q}^\dagger Y_Q \tilde{Q} + \tilde{u}_R^\dagger Y_{U^c} \tilde{u}_R + \tilde{d}_R^\dagger Y_{D^c} \tilde{d}_R|^2 , \end{aligned} \quad (6.111)$$

sowohl für top und bottom Squarks. Squark-Massen Beiträge stammen aus den Mischtermen zwischen Squark- und Higgsfeldern. Der $SU(2)$ D -Term liefert

$$-\frac{1}{2} [2(\frac{g}{2})^2 (v_1^2 - v_2^2) (\tilde{t}_L^\dagger \tilde{t}_L - \tilde{b}_L^\dagger \tilde{b}_L)] = -m_W^2 \cos 2\beta T_{3Q} \tilde{Q}_L^\dagger \tilde{Q}_L . \quad (6.112)$$

Die Hyperladungs D -Terme liefern

$$\sin^2 \theta_W \cos 2\beta m_Z^2 \left(\tilde{t}_L^\dagger \frac{Y_Q}{2} \tilde{t}_L + \tilde{b}_L^\dagger \frac{Y_Q}{2} \tilde{b}_L + \tilde{t}_R^\dagger \frac{Y_{U^c}}{2} \tilde{t}_R + \tilde{b}_R^\dagger \frac{Y_{D^c}}{2} \tilde{b}_R \right) . \quad (6.113)$$

Indem die Hyperladung mithilfe der elektrischen Ladung eliminiert wird, erhält man den D -Term Beitrag, der für jede MSSM Sfermion Massenmatrix zum Quadrat gleich ist,

$$m_{D-Term}^2 = m_Z^2 \cos 2\beta (T_3 - Q \sin^2 \theta_W) . \quad (6.114)$$

Zusammenfassend erhalten wir für die top Squarks

$$-(\tilde{t}_L^\dagger, \tilde{t}_R^\dagger) \mathcal{M}_{\tilde{t}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix} \quad (6.115)$$

mit der Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde{t}}^2$

$$\begin{pmatrix} m_{\tilde{t}_L}^2 + m_t^2 + D(\tilde{t}_L) & m_t(-A_t + \mu \cot \beta) \\ m_t(-A_t + \mu \cot \beta) & m_{\tilde{t}_R}^2 + m_t^2 + D(\tilde{t}_R) \end{pmatrix} \quad (6.116)$$

und

$$D(\tilde{t}_L) = m_Z^2 \cos 2\beta \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \quad (6.117)$$

$$D(\tilde{t}_R) = m_Z^2 \cos 2\beta \left(\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right). \quad (6.118)$$

Die Eigenwerte dieser Massenmatrix sind

$$\begin{aligned} m_{\tilde{t}_{1,2}}^2 &= \frac{1}{2}(m_{\tilde{t}_L}^2 + m_{\tilde{t}_R}^2) + \frac{1}{4}m_Z^2 \cos 2\beta + m_t^2 \\ &\mp \left\{ \left[\frac{1}{2}(m_{\tilde{t}_L}^2 - m_{\tilde{t}_R}^2) + m_Z^2 \cos 2\beta \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \right]^2 + m_t^2(\mu \cot \beta - A_t)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.119)$$

Dabei ist $\tilde{t}_1$ leichter als $\tilde{t}_2$. Die top Squark-Mischungsmatrix ist durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_t & -\sin \theta_t \\ \sin \theta_t & \cos \theta_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix} \quad (6.120)$$

definiert. Der top Squark Mischungswinkel ist durch

$$\tan \theta_t = \frac{m_{\tilde{t}_L}^2 + m_t^2 + m_Z^2 \cos 2\beta \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) - m_{\tilde{t}_1}^2}{m_t(-A_t + \mu \cot \beta)} \quad (6.121)$$

gegeben. Das Massensplitting ist für die schweren Sfermionen am größten. Daher kann $\tilde{t}_1$ das leichteste Squark, $\tilde{\tau}_1$ das leichteste Slepton sein. Im Fall von down-artigen Squarks und Sleptonen ist in der Massenmatrix $\cot \beta$ durch $\tan \beta$ zu ersetzen. Das bedeutet, daß für große Werte von $\tan \beta$ das Splitting zwischen $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ groß ist. Es gibt dann Parameterregionen, in denen das $\tilde{b}_1$ das leichteste Squark ist.

Fig. 6.3 zeigt ein Beispiel für ein Massenspektrum. Hier ist das $\tilde{\chi}_1^0$ das leichteste SUSY Teilchen (LSP).

6.4 Wechselwirkungen im MSSM

Auf die Herleitung und Ausarbeitung der Wechselwirkungen im MSSM sei hier verzichtet. Nach den Ausführungen der vorigen Kapitel ist die Herleitung im Prinzip klar. Für eine komplette Ableitung und Liste der Feynmanregeln sei der Leser auf die Literatur verwiesen. Einige seien hier genannt

1. H. Baer and X. Tata, *Weak Scale Supersymmetry*, Cambridge University Press.
2. S. Dawson, J.F. Gunion, H.E. Haber and G. Kane, *The Higgs Hunter's Guide*, Frontiers in Physics. (**Enthält sämtlich Higgsboson-Feynmanregeln.**)
3. M. Drees, R.M. Godbole and P. Roy, *Theory and Phenomenology of Sparticles*, World Scientific.

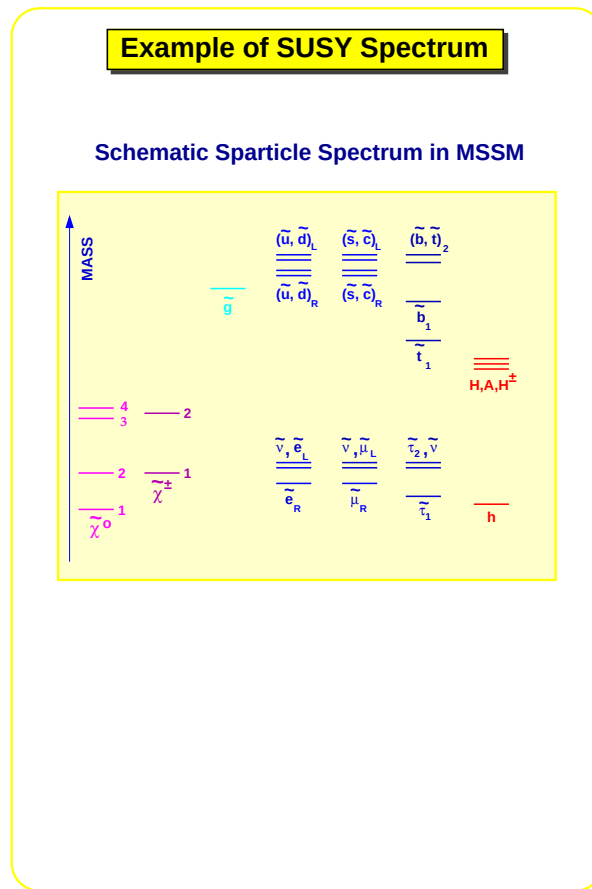


Abbildung 6.1: Beispiel für ein SUSY-Massenspektrum.

6.4.1 Higskopplungen

Die Kopplungen der MSSM Higgsbosonen an die SM Teilchen, W und Z Bosonen und Fermionen, sind, da durch den Higgsmechanismus generiert, proportional zur Masse dieser Teilchen. Allerdings sind die Kopplungen im Vergleich zum Standardmodell um die Mischungswinkel modifiziert. So finden wir für die Kopplungen der neutralen Higgsbosonen an zwei massive Eichbosonen, normiert auf die entsprechende SM-Kopplung die in Tabelle 6.4.1 angegebenen Werte. Die Kopplungen sind im Vergleich zum SM um $\sin/\cos$ der Mischungs-

ϕ	$g_{\phi WW}$	$g_{\phi ZZ}$
h	$\sin(\beta - \alpha) \rightarrow 1$	$\sin(\beta - \alpha) \rightarrow 1$
H	$\cos(\beta - \alpha) \rightarrow 0$	$\cos(\beta - \alpha) \rightarrow 0$
A	0	0

Tabelle 6.3: Die Kopplungen der neutralen MSSM Higgsbosonen an W, Z Bosonen. In blau: der SM-Limes.

winkel α und β modifiziert. Das heißt die MSSM Higskopplungen an massive Eichbosonen sind immer kleiner als die entsprechenden SM Kopplungen. Die Kopplung von A an die

massiven Eichbosonen ist gleich null, da das A Boson ein pseudoskalar Teilchen ist. Es gilt die Summenregel

$$g_{HVV}^2 + g_{hVV}^2 = g_{H^{SM}VV}^2, \quad (6.122)$$

wobei H^{SM} das Standardmodell-Higgs boson bezeichnet. Ferner sind die H und h Kopplungen an die Eichbosonen komplementär. Ist die eine Kopplung groß, so ist die andere klein und vice versa. In Tabelle 6.4.1 sehen wir die neutralen Higgsbosonkopplungen des MSSM an die up- und down-Typefermionen normiert auf die entsprechende SM-Kopplung. Eine

ϕ	$g_{\phi uu}$	$g_{\phi dd}$
h	$\cos \alpha / \sin \beta \rightarrow 1$	$-\sin \alpha / \cos \beta \rightarrow 1$
H	$\sin \alpha / \sin \beta \rightarrow 1 / \tan \beta$	$\cos \alpha / \cos \beta \rightarrow \tan \beta$
A	$1 / \tan \beta$	$\tan \beta$

Tabelle 6.4: Die Kopplungen der neutralen MSSM Higgsbosonen an Fermionen. In blau: der SM-Limes.

wichtige Eigenschaft ist, daß die Kopplungen an down-(up-)type Fermionen mit $\tan \beta$ ansteigt (abfällt). Ferner ist in den Tabellen 6.4.1 und 6.4.1 in blau der SM-Limes angegeben. Dieser Limes wird erreicht, wenn die schweren Higgsbosonen $H, A, H^\pm$ sehr schwer werden und von der Theorie entkoppeln. M_h nimmt dann seinen maximalen Wert an. Ferner ist dann $\alpha \sim \beta - \pi/2$. Wir haben also

$$\cos \alpha = \sin \beta \quad \text{und} \quad \sin \alpha = -\cos \beta, \quad (6.123)$$

so daß sich also die in den Tabellen angegebenen Werte im SM-Limes ergeben. Insbesondere gehen die Kopplungen des leichten Higgsbosons h gegen 1⁸. Es benimmt sich also wie SM-artiges Higgsboson. Sollte dieser Parameterbereich realisiert sein und die schweren Higgsbosonen im Experiment nicht gesehen werden und also nur das leichte Higgsboson gefunden werden, so könnte man allein aus dem Higgssektor nicht schließen, ob man ein SM oder ein SUSY Higgsboson gefunden hat.

Dort wo wir im folgenden für das Verständnis die Feynmanregeln benötigen, werden auch die weiteren Fermionregeln angegeben werden.

6.5 Strahlungskorrekturen zur Higgsbosonmasse

Wie wir vorher gesehen haben, ist auf tree-level die Masse des leichtesten Higgsbosons kleiner als die Z -Bosonmasse. Dann aber hätte das leichte Higgsboson bereits in den Experimenten gefunden werden müssen. Allerdings erhält die Higgsbosonmasse Strahlungskorrekturen. Und diese sind erheblich. Diese können in einem diagrammtischen Zugang bestimmt werden, siehe Fig. 6.2, indem die die Selbstenergien des Higgsbosons berechnet werden und der Pol im Propagator lokalisiert wird. Der dominante Beitrag stammt von den top-Yukawakopplungen. Zur Illustration vereinfachen wir und betrachten nur diese dominanten Terme sowie vernachlässigen Mischung zwischen den Generationen. Damit ergibt sich

$$m_{h,H} = \frac{1}{2}[(m_A^2 + m_Z^2 + \delta) \mp \xi^{1/2}] \quad (6.124)$$

⁸Beachte, daß die hier angegebenen Kopplungen auf den SM Wert normiert sind.

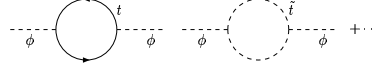


Abbildung 6.2: Top, stop-Schleifen, die zur Higgs-Selbstenergie beitragen.

mit

$$\xi = [(m_A^2 - m_Z^2) \cos 2\beta + \delta]^2 + \sin^2 2\beta (m_A^2 + m_Z^2)^2 \quad (6.125)$$

und dem Korrekturterm

$$\delta = \frac{3G_F m_t^4}{2\sqrt{2}\pi^2 \sin^2 \beta} \log \left[\left(1 + \frac{m_{\tilde{t}_L}^2}{m_t^2} \right) \left(1 + \frac{m_{\tilde{t}_R}^2}{m_t^2} \right) \right] + \text{stop Mischung}[\mu, A_t] . \quad (6.126)$$

Der Mischungswinkel α ändert sich ebenfalls durch die Strahlungskorrekturen. Er lautet

$$\tan \alpha = \frac{(m_A^2 - m_Z^2) \cos 2\beta + \delta + \xi^{1/2}}{\sin 2\beta (m_A^2 + m_Z^2)} . \quad (6.127)$$

Es ist der Korrekturterm δ , der die leichteste Higgsmasse schwerer als die Z -Bosonmasse macht. Wie man an der Formel sieht, geht die führende Strahlungskorrektur mit der Top-Quarkmasse in der 4. Potenz. Die Korrektur ist also entsprechend groß. Die Higgsmassenkorrekturen sind in der Zwischenzeit sehr genau untersucht worden, unter Einbezug der Mischungseffekte und auch nicht führender Terme bis hin zur 3-Schleifenordnung. All dies, um die Higgsmasse so genau wie möglich zu bestimmen. Im Rahmen des MSSM kann die Higgsmasse in bestimmten Parameterbereichen bis zu 135-140 GeV schwer werden. Tatsächlich wurde gezeigt, daß in allgemeinen SUSY Theorien die leichteste Higgsmasse, wenn man Unitariät und Kopplungsvereinigung bei etwa 10^{17} GeV fordert, nicht schwerer als etwa 200 GeV wird.

Example of SUSY Spectrum

Schematic Sparticle Spectrum in MSSM

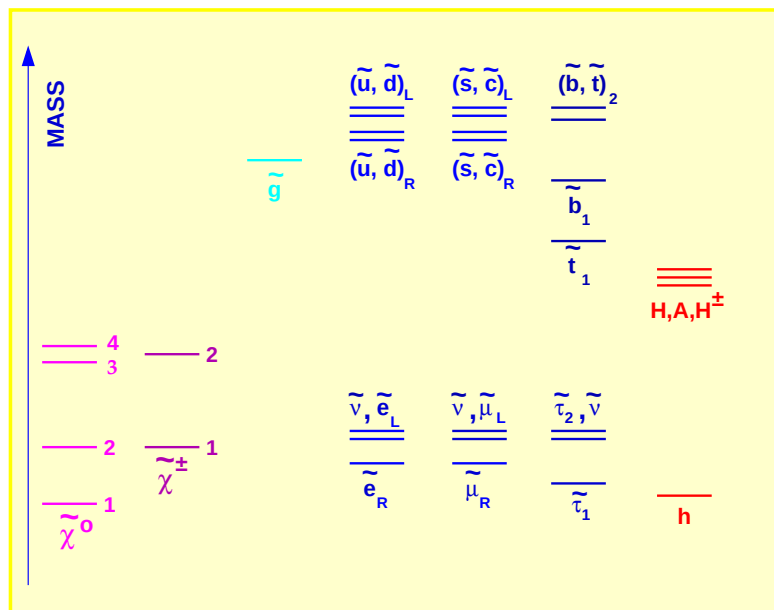


Abbildung 6.3: Beispiel für ein SUSY-Massenspektrum.