Einführung in Theoretische Teilchenphysik

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 10

Abgabe: Mo, 18.01.16
Besprechung: Mi, 20.01.16

Aufgabe 21: Massive QED (Stückelberg-Mechanismus) (*3+2+2=7 Punkte*)

Wir betrachten die QED mit nur einem Fermion ψ und dem Photon-Feld A sowie der folgenden Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \ , \qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \ ,$$

wobei sich die Felder wie folgt transformieren

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x) \ , \qquad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \ .$$

(a) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ eichinvariant ist, sich durch obige Transformation also nicht ändert, aber nicht der Term $\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{m_A^2}{2}A^\mu A_\mu$.

Eichinvarianz lässt sich erzielen, indem wir stattdessen den folgenden Term zur Lagrangedichte hinzufügen:

$$\mathcal{L}_{\text{S}} = \frac{m_S^2}{2}(A^\mu + \frac{1}{m_S}\partial^\mu\sigma)(A_\mu + \frac{1}{m_S}\partial_\mu\sigma)$$

mit einem zusätzlichen Skalarfeld σ.

(b) Wie muss sich $\sigma(x)$ transformieren, sodass $\mathcal{L}_{\text{S}}$ eichinvariant ist?

Für eine komplette Theorie benötigen wir noch einen zusätzlichen Term.

$$\mathcal{L}_{\text{G}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu + m_S\xi\sigma)^2 \ , \quad \xi \in \mathbb{R}$$

(c) Welche Bedingung müssen Sie an α stellen, damit auch $\mathcal{L}_{\text{G}}$ eichinvariant ist?

Aufgabe 22: Goldstone-Bosonen in O(3) (*1+4+1+6+1=13 Punkte*)

Wir betrachten ein Modell, das aus einem skalaren Feld $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ besteht, welches in der fundamentalen Darstellung der $O(3)$ lebt. Die zugehörige Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^\dagger(\partial^\mu \sigma) - \lambda(\sigma^2 + \mu^2)^2$$

mit reellen Parametern μ^2 und λ.
Berechnen Sie jeweils das Massenspektrum für folgende Fälle:

(a) $\mu^2 > 0$,

(b) $\mu^2 < 0$. Starten Sie mit dem Ansatz $\sigma \to \sigma' + (0, 0, v)^T$. Welchen Wert besitzt v?

Nun wollen wir das Modell „eichen", d.h. eine Eichwechselwirkung mit einem Vektorfeld W_μ^a einführen ($a = 1 \ldots 3$). Dazu ersetzen wir wie gewohnt die partielle Ableitung in $\mathcal{L}$ durch die kovariante

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + i\, g\, t^a_{kl} W^a_\mu \ ,$$

wobei die $t^a_{kl} = -i\varepsilon_{akl}$ die Generatoren der $O(3)$ bezeichnen.
Berechnen Sie wieder die beiden Fälle (Massen der Skalare und Vektorbosonen):

(c) $\mu^2 > 0$,

(d) $\mu^2 < 0$. Im Grundzustand lässt sich σ folgendermaßen entwickeln:
$\sigma = e^{\frac{i}{v} t\, \Theta}(\sigma_0 + \eta')$ mit $v = \sqrt{-\mu^2}$, $\sigma_0 = (0, 0, v')^T$, $\eta' = (0, 0, \eta)^T$, $\Theta = (\vartheta_1, \vartheta_2, 0)$.
Hinweis: Eichtransformationen können $\mathcal{L}$ vereinfachen.

(e) Welcher Fall entspricht dem Higgsfeld im Standardmodell? Vergleichen Sie.

Hinweis: Die Masse m_i lässt sich als Koeffizient des quadratischen Terms $-\frac{m_i^2}{2}\sigma_i\sigma_i$ aus der Lagrangedichte ablesen.