Einführung in Theoretische Teilchenphysik

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 2

Abgabe: Di, 03.11.15
Besprechung: Mi, 04.11.15

Aufgabe 4: Gekoppelte Oszillatoren (*1+4+4+3+4+2+2=20 Punkte*)

Wir betrachten eine quantenmechanische Kette aus N Teilchen der Masse m mit Abstand a in der Gleichgewichtslage, die sich jeweils in einem harmonischen Potential befinden. Benachbarte Teilchen sind ebenfalls miteinander harmonisch gekoppelt. Die Auslenkungen aus dem Gleichgewicht bezeichnen wir mit q_i, die zugehörigen Impulse mit p_i. Die Kette sei geschlossen, $q_0 = q_N$, und wir benutzen natürliche Einheiten, $\hbar = 1$. Dann lautet der zugehörige Hamilton-Operator:

$$H = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2m} p_n^2 + \frac{m\Omega^2}{2} \left(q_n - q_{n-1}\right)^2 + \frac{m\Omega_0^2}{2} q_n^2 \, .$$

(a) Die absolute x-Koordinate des n-ten Massenpunktes ist gegeben durch $x_n = a_n + q_n = na + q_n$ mit $[x_n, p_m] = i\delta_{nm}$. Wie lauten also die Kommutatoren

$$[q_n, p_m]\, , \qquad [q_n, q_m]\, , \qquad [p_n, p_m]\, ?$$

(b) Leiten Sie aus dem Hamilton-Operator die zugehörigen Bewegungsgleichungen in der Heisenberg-Darstellung (zeitabhängige Operatoren) ab und kombinieren Sie sie in eine gemeinsame Differentialgleichung 2. Ordnung.

(c) Zur Diagonalisierung des Hamiltonoperators führen wir sogenannte Normalkoordinaten Q_k und -impulse P_k als Fouriersumme ein

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_k e^{ika_n} Q_k \, , \qquad \Rightarrow Q_k = \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_n e^{-ika_n} q_n \, ,$$

$$p_n = \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_k e^{-ika_n} P_k \, , \qquad \Rightarrow P_k = \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_n e^{ika_n} p_n \, .$$

Begründen Sie, dass aufgrund der periodischen Randbedingungen ($e^{ikaN} = 1$) für den Summationsindex gilt: $k = \frac{2\pi\ell}{Na}$ mit ganzzahligem ℓ zwischen $-\frac{N}{2}$ (ausschließlich) und $+\frac{N}{2}$ (einschließlich).
Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen gelten:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{ikan}e^{-ik'an} = \delta_{kk'}\,, \qquad\qquad \frac{1}{N}\sum_{k} e^{ikan}e^{-ikan'} = \delta_{nn'}\,.$$

(d) Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonoperator in Normalkoordinaten und -impulsen in der Form $H = \frac{1}{2}\sum_k \left(P_k P_k^\dagger + \omega_k^2 Q_k Q_k^\dagger\right)$ schreiben lässt mit $\omega_k^2 = \Omega^2\left(2\sin\frac{ka}{2}\right)^2 + \Omega_0^2$. Aufgrund der Hermitizität von q_n und p_n gilt: $Q_k^\dagger = Q_{-k}$, $P_k^\dagger = P_{-k}$.

(e) Als letzten Schritt führen wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(\omega_k Q_k + iP_k^\dagger\right)\,, \qquad\qquad a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(\omega_k Q_k^\dagger - iP_k\right)\,.$$

Drücken Sie den Hamiltonoperator nun durch diese aus.
Finden Sie dazu zunächst Q_k und P_k als Funktion von a_k, $a_{-k}^\dagger$ bzw. a_{-k}, $a_k^\dagger$. Berechnen Sie dann die Kommutatoren $[a_k, a_{k'}]$, $[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger]$, $[a_k, a_{k'}^\dagger]$ via den entsprechenden Kommutatoren für P_k, Q_k.

(f) Nun gehen wir in den Kontinuumsgrenzfall einer schwingenden Saite, $a \to 0$ und $N \to \infty$, wobei die Länge der Saite $L = aN$, Dichte $\rho = \frac{m}{a}$ und Steifigkeit $v^2 = (\Omega a)^2$ konstant bleiben. Wir definieren

$$q(x) = q_n\sqrt{\frac{m}{a}}\,, \qquad\qquad p(x) = p_n\sqrt{\frac{1}{ma}}\,.$$

Schreiben Sie die Bewegungsgleichung mit diesen Ersetzungen um. Überlegen Sie sich zunächst die Bedeutung von $q_{n\pm1}$.

(g) Schließlich betrachten wir noch die Verallgemeinerung auf drei Raumdimensionen, $x \to \vec{x}$, wobei die Auslenkungen eindimensional bleiben, und substituieren

$$v \to c\,, \qquad \frac{\Omega_0^2}{c^2} \to m^2\,, \qquad (\vec{x}, t) \equiv x\,, \qquad q(\vec{x}, t) \to \varphi(x)\,.$$

Wie lautet nun die Bewegungsgleichung? Kommt sie Ihnen bekannt vor?