Einführung in Theoretische Teilchenphysik

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 3

Abgabe: Mo, 09.11.15
Besprechung: Mi, 11.11.15

Aufgabe 5: Lorentzinvarianz (*2+2=4 Punkte*)

(a) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass das Integral $\int \mathrm{d}^4x$ Lorentz-invariant ist.

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E} = \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3}\delta(p^2 - m^2)\Theta(p_0)\,,$$

wobei d^3p das Volumenelement der drei Raumdimensionen, δ die Diracsche Delta-Distribution und Θ die Heaviside-Stufenfunktion bezeichnet.

Aufgabe 6: Invarianz der Lagrangedichte (*4 Punkte*)

Betrachten Sie die folgende Transformation der Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu\varphi_i(x))$:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu\,,$$

wobei die Λ^μ beliebige Funktionen der Felder $\varphi_i(x)$ sind. Zeigen Sie, dass diese Transformation die Bewegungsgleichungen unverändert lässt.

Aufgabe 7: Hamiltondichte eines reellen Feldes (*2 Punkte*)

Betrachten Sie ein freies reelles Feld der Masse m. Zeigen Sie ausgehend von der klassischen Lagrangedichte, dass die Hamiltondichte durch

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\pi^2(x) + (\vec{\nabla}\varphi(x))^2 + m^2\varphi^2(x)\right)$$

gegeben ist. Dabei ist $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi(x))}$.

Aufgabe 8: Lagrangedichte eines Vektorfelds (*4 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}[\partial_\mu \varphi_\nu(x)][\partial^\mu \varphi^\nu(x)] + \frac{1}{2}[\partial_\mu \varphi^\mu(x)][\partial_\nu \varphi^\nu(x)] + \frac{m^2}{2}\varphi_\mu(x)\varphi^\mu(x)$$

für das reelle Vektorfeld $\varphi^\mu(x)$ auf die Feldgleichungen

$$[g_{\mu\nu}(\Box + m^2) - \partial_\mu\partial_\nu]\varphi^\nu(x) = 0$$

führt und das Feld $\varphi^\mu(x)$ die Lorentzbedingung $\partial_\mu \varphi^\mu(x) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 9: Noether-Theorem (*6 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu\varphi_1)^2 + (\partial_\mu\varphi_2)^2\right) - \frac{m^2}{2}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)^2$$

invariant unter der Transformation ($\vartheta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \varphi_1 \to \varphi_1' &= \varphi_1 \cos\vartheta - \varphi_2 \sin\vartheta \qquad\qquad x_\mu \to x_\mu' = x_\mu \\ \varphi_2 \to \varphi_2' &= \varphi_1 \sin\vartheta + \varphi_2 \cos\vartheta \end{aligned}$$

ist.
Berechnen Sie den zugehörigen Noether-Strom

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\delta\varphi_i - T^{\mu\nu}\delta x_\nu$$

mit

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}(\partial^\nu \varphi_i) - \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

und die Noether-Ladung

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x J^0 \,.$$