Einführung in Theoretische Teilchenphysik

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 4

Abgabe: Mo, 16.11.15
Besprechung: Mi, 18.11.15

Aufgabe 10: Energie und Impuls des reellen Feldes (*3+5+1+5+3=17 Punkte*)

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein reelles Skalarfeld mit der auf die Klein-Gordon-Gleichung führenden Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\mathrm{KG}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi(x))(\partial^\mu \varphi(x)) - \frac{m^2}{2}\varphi(x)^2$. Die Fourier-Zerlegung des quantisierten Feldes ist durch

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx} \right]$$

gegeben. Außerdem gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\int \mathrm{d}^3 x e^{-ipx} e^{ip'x} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')$$

(aufgrund der Energie-Impulsbeziehung $E_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$ folgt daraus auch $p_0' = p_0$).

(a) Zeigen Sie, dass sich der Vernichtungsoperator schreiben lässt als

$$a(\vec{p}) = \int \mathrm{d}^3 x \, e^{ipx} \left(i\dot{\varphi}(x) + E_p \varphi(x) \right) \, .$$

(b) Für das Feld gelten die Kommutatorrelationen

$$[\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}\,', t)] = [\dot{\varphi}(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}\,', t)] = 0 \, , \qquad [\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}\,', t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}\,') \, .$$

Berechnen Sie daraus die entsprechenden Relationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}\,')] = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}\,')] = 0 \, , \qquad [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}\,')] = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,') \, .$$

(c) Berechnen Sie den zugehörigen Energie-Impuls-Tensor $T^\mu{}_\nu$ des Feldes.

(d) Die Energie des Feldes bestimmt sich aus $H = \int \mathrm{d}^3x\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3x T^0_0$. Verwenden Sie die Fourier-Zerlegung des Feldes sowie die Kommutatorregeln der Erzeuger- und Vernichteroperatoren, um zu zeigen, dass die Energie, d.h. der Hamilton-Operator, durch

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} E_p \left[2\tilde{N}(\vec{p}) + C\right]$$

gegeben ist. Hier ist

$$N = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \tilde{N}(\vec{p})$$

der Teilchenzahloperator und C eine, etwas ungewöhnliche, Konstante.

(e) Der Impuls des Feldes lässt sich aus $P_i = \int \mathrm{d}^3x T^0{}_i$ berechnen. Zeigen Sie, dass dies für das reelle Skalarfeld

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \left[2\tilde{N}(\vec{p}) + C\right]$$

ergibt.

Aufgabe 11: Feynman-Propagator (*3 Punkte*)

Für die Störungstheorie benötigen wir später den Feynman-Propagator des reellen Feldes

$$i\Delta_F(x - x') := \langle 0 \,| T(\varphi(x)\varphi(x')) |\, 0\rangle\,,$$

wobei $T(\varphi(x)\varphi(x')) = \Theta(t - t')\varphi(x)\varphi(x') + \Theta(t' - t)\varphi(x')\varphi(x)$ das zeitgeordnete Produkt bezeichnet. Nach kurzer Rechnung, die wir hier überspringen wollen, findet man die Impulsraumdarstellung

$$\Delta_F(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\,.$$

Zeigen Sie, dass der Feynman-Propagator die inhomogene Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^{(4)}(x)$$

erfüllt.