

Einführung in Theoretische Teilchenphysik

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 5

Abgabe: Mo, 23.11.15

Besprechung: Mi, 25.11.15

Aufgabe 12: Lagrangedichte des Photons (3+7+5+2+3=20 Punkte)

Die Lagrangedichte des Photons kann geschrieben werden als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ und dem Quellterm J^μ .

- Wenden Sie die Eichtransformation $A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$ an und zeigen Sie, dass \mathcal{L}' auf dieselben Bewegungsgleichungen führt.
- Leiten Sie die klassische Form der Maxwell-Gleichungen (Gl. 4.2 im Skript) explizit aus

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0$$

her.

Zeigen Sie, dass die 4 homogenen Maxwell-Gleichungen auch aus

$$\partial^{[\mu} F^{\nu\rho]} \equiv \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0$$

folgen. Was passiert mit den restlichen Gleichungen dieser Formulierung?

- Eine spekulative Erweiterung der Elektrodynamik ergänzt den Feldstärketensor durch

$$F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - \partial_\rho \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A'_\sigma$$

mit einem zweiten Potential $A'^\mu = (\varphi', \vec{A}')^T$. Zeigen Sie, dass sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen nicht ändern.

Wir können allerdings einen weiteren Quellterm J'^μ hinzufügen als

$$\partial_\mu \tilde{F}'^{\mu\nu} = J'^\nu.$$

Wie verändern sich die Maxwell-Gleichungen dadurch?

Im folgenden betrachten wir wieder die Standard-Elektrodynamik.

- (d) Zeigen Sie, dass die oben aufgeführte Lagrangedichte inkompatibel ist mit den sogenannten kanonischen Vertauschungsrelationen ($\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_\mu)}$)

$$\begin{aligned} [A^\mu(\vec{x}, t), \pi^\nu(\vec{x}', t)] &= ig^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [A^\mu(\vec{x}, t), A^\nu(\vec{x}', t)] &= [\pi^\mu(\vec{x}, t), \pi^\nu(\vec{x}', t)] = 0. \end{aligned}$$

- (e) Eine alternative Lagrangedichte, die auf Fermi zurückgeht, ist stattdessen

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial^\mu A^\nu) (\partial_\mu A_\nu) - J^\mu A_\mu.$$

Berechnen Sie die daraus folgenden Bewegungsgleichungen. Was muss gelten, damit diese äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen sind?