Einführung in Theoretische Teilchenphysik

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 6

Abgabe: Mo, 30.11.15
Besprechung: Mi, 02.12.15

Aufgabe 13: Energie und Impuls des Dirac-Feldes (*3+2+5+1+4=15 Punkte*)

Analog zu Aufgabe 10, wo wir Energie und Impuls des reellen Klein-Gordon-Felds berechnet haben, betrachten wir nun das Dirac-Feld. Die Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x)\,, \tag{1}$$

wobei ψ und $\bar{\psi}$ als unabhängige Variablen betrachtet werden.

(a) Zeigen Sie, dass damit gilt:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = i\psi^\dagger\,, \quad \bar{\pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \bar{\psi})} = 0\,.$$

Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen für ψ und $\bar{\psi}$.

(b) Wie lautet der zugehörige Energie-Impuls-Tensor? Warum verschwindet dabei der Summand proportional zu $g^{\mu\nu}$?

Für das Dirac-Feld machen wir den Ansatz

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3\sqrt{2E}} \sum_{s=1,2} a_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx} + b_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{+ipx}\,.$$

Für die Spinoren gilt dabei

$$\begin{aligned}
(\gamma^\mu p_\mu - m)u_s(\vec{p}) &= 0\,, & \bar{u}_s(\vec{p})(\gamma^\mu p_\mu - m) &= 0\,,\\
(\gamma^\mu p_\mu + m)v_s(\vec{p}) &= 0\,, & \bar{v}_s(\vec{p})(\gamma^\mu p_\mu + m) &= 0\,,\\
u_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p})v_{s'}(\vec{p}) &= 2E\delta_{ss'}\,, &&\\
u_s^\dagger(\vec{p})v_{s'}(-\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p})u_{s'}(-\vec{p}) &= 0\,. &&
\end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie damit den 4-Impuls-Vektor

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3x T^{0\mu}$$

und zeigen Sie, dass dies auf die in der Vorlesung angegebene Form

$$: P^\mu : = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} p^\mu \sum_{s=1,2} \left(\tilde{N}_s^a(\vec{p}) + \tilde{N}_s^b(\vec{p}) \right)$$

führt.

(d) Zeigen Sie, dass der Strom $j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ erhalten ist.

(e) Die zugehörige Ladung ist gegeben durch

$$Q = \int \mathrm{d}^3x j^0(x) \,.$$

Drücken Sie diese durch die a, $a^\dagger$, b und $b^\dagger$ aus.

Aufgabe 14: Gamma-Algebra (*5 Punkte*)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Gamma-Matrizen

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\gamma^\mu &= 4 \cdot \mathbb{1}_4 \,, \\
\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha \,, \\
\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 \,, \\
\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\beta] &= 4g^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

mit Hilfe der Antikommutatorrelation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_4$.