Einführung in Theoretische Teilchenphysik

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 7

Abgabe: Mo, 07.12.15
Besprechung: Mi, 09.12.15

Aufgabe 15: Gamma-Algebra 2 (*1+2+3+8=14 Punkte*)

Für Rechnungen mit γ-Matrizen lassen sich einige nützliche Eigenschaften herleiten, die wir in dieser Aufgabe zeigen wollen. Diese benötigen nur die Clifford-Algebra, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_4$, keine explizite Darstellung der γ-Matrizen.
Das hermitesch Konjugierte der γ-Matrizen lässt sich festlegen zu $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$.

(a) Zeigen Sie, dass sich damit allgemein definieren lässt: $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$.

Neben den 4 üblichen γ-Matrizen führt man eine fünfte ein, die wie folgt definiert ist:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \,.$$

(b) Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist zu

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \,.$$

(c) Zeigen Sie, dass für γ^5 gilt:
   (i) $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$,
   (ii) $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}_4$,
   (iii) $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$.

(d) Zeigen Sie die folgenden Identitäten von Spuren von γ-Matrizen:
   (i) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu] = 0$,
   (ii) $\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n}] = 0$, falls n ungerade ist,
   (iii) $\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n}] = \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_n} \cdots \gamma^{\mu_1}]$,
   (iv) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$,
   (v) $\mathrm{Tr}[\gamma^5] = 0$,
   (vi) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5] = 0$,
   (vii) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Aufgabe 16: Gordon-Identität (*5+1=6 Punkte*)

Die Gordon-Identitäten geben Relationen zwischen verschiedenen Bilinearen der Fermionfelder, wenn die Felder Lösungen der Dirac-Gleichung sind.

(a) Verwenden Sie die Dirac-Gleichung im Impulsraum, $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$, um die folgenden Gordon-Identitäten zu beweisen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{u}(p')\left[q^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p'+p)_\nu\right]u(p)\,,\\
\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) &= \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[(p'+p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p)\,,\\
\bar{u}(p')\gamma^\mu\gamma^5 u(p) &= \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[q^\mu\gamma^5 + i\sigma^{\mu\nu}(p'+p)_\nu\gamma^5\right]u(p)\,,
\end{aligned}
$$

wobei als Abkürzungen $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$ und $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$ eingeführt wurden. Überlegen Sie sich dazu zuerst, wie die Dirac-Gleichung entsprechend für $\bar{u}(p)$ aussieht.

(b) Wie lauten die entsprechenden Ausdrücke für v, für das die folgende Dirac-Gleichung gilt:

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0\,.$$