Einführung in Theoretische Teilchenphysik

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 8

Abgabe: Mo, 14.12.15
Besprechung: Mi, 16.12.15

Aufgabe 17: Eigenschaften von Dirac-Spinoren (*1+2+2=5 Punkte*)

Die Dirac-Spinoren erfüllen Orthogonalitäts-

$$\bar{u}_s(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}) = -\bar{v}_s(\vec{p})v_{s'}(\vec{p}) = 2m\delta_{ss'}\,,$$
$$\bar{u}_s(\vec{p})v_{s'}(\vec{p}) = \bar{v}_s(\vec{p})u_{s'}(\vec{p}) = 0\,,$$

und Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_s \left(u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) - v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p})\right) = 2m\,.$$

(a) Überprüfen Sie die Vollständigkeitsrelation, indem Sie zeigen, dass Sie angewandt auf die Basiszustände $u_{s'}(\vec{p})$, $v_{s'}(\vec{p})$, $\bar{u}_{s'}(\vec{p})$ und $\bar{v}_{s'}(\vec{p})$ das richtige Ergebnis liefert.

Nun definieren wir Projektionsoperatoren $\Lambda^{\pm}(\vec{p}) = \frac{\pm\not{p}+m}{2m}$, die die Zustände positiver bzw. negativer Energie aus einem beliebigen Zustand $f(\vec{p}) = \sum_s \alpha_s u_s(\vec{p}) + \beta_s v_s(\vec{p})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, projizieren.

(b) Zeigen Sie, dass $\Lambda^{\pm}(\vec{p})$ tatsächlich Projektoren sind:

$$\left(\Lambda^{\pm}(\vec{p})\right)^2 = \Lambda^{\pm}(\vec{p})\,, \qquad \Lambda^{+}(\vec{p})f(\vec{p}) = \sum_s \alpha_s u_s(\vec{p})\,,$$
$$\Lambda^{+}(\vec{p}) + \Lambda^{-}(\vec{p}) = 1\,, \qquad \Lambda^{-}(\vec{p})f(\vec{p}) = \sum_s \beta_s v_s(\vec{p})\,.$$

(c) Zeigen Sie damit schließlich

$$\sum_s u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) = \not{p} + m\,, \qquad \sum_s v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) = \not{p} - m\,.$$

Aufgabe 18: $2 \to 2$ Phasenraum im allgemeinen Fall (*5 Punkte*)

Wir betrachten das Phasenraumintegral für einen allgemeinen Prozess mit zwei Teilchen (Impulse p_1, p_2, Massen m_1, m_2) im Endzustand. Zeigen Sie, dass

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2)$$
$$= \frac{1}{8\pi q^2} \lambda(q^2, m_1^2, m_2^2) \Theta(q_0) \Theta(q^2 - (m_1 + m_2)^2)$$

mit

$$\lambda(a^2, b^2, c^2) = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2}$$

und der Heaviside-Stufenfunktion Θ gilt.
Hinweise:

- Verwenden Sie die Beziehung $\frac{1}{2E} = \int \mathrm{d}p_0 \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2)$.
- Arbeiten Sie im Schwerpunktsystem der beiden Endzustandsteilchen.

Aufgabe 19: 3-Teilchen-Phasenraum mit einer Masse (*7+3=10 Punkte*)

Berechnen Sie den 3-Teilchen-Phasenraum

$$\frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2 - p_3)$$

für den Fall, dass Teilchen 1 und 2 masselos sind und Teilchen 3 eine Masse m_3 besitzt. Arbeiten Sie wieder im Schwerpunktsystem der auslaufenden Teilchen.

(a) Drücken Sie das Resultat durch einen Vorfaktor mal

$$\mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}\cos\vartheta_1 \, \mathrm{d}\varphi_2$$

aus, wobei ϑ_i und φ_i die Winkel des Impulses p_i in Kugelkoordinaten sind, und

$$x_i = \frac{2E_i}{\sqrt{q^2}} \ .$$

Hinweis:
Eine geschickte Wahl der Winkel von Teilchen 2, z.B. relativ zur Position von Teilchen 1, kann die erhaltenen Ausdrücke vereinfachen und die φ_1-Integration trivial werden lassen.

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Integrationsgrenzen. Gehen Sie dabei von den Winkeln aus, die den gesamten Raumbereich abdecken sollen, und bestimmen daraus den verbleibenden Bereich für x_1 und x_2.