Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. M. Rauch

Übungsblatt 10

Besprechung: Mi, 12.07. - Do, 13.07.17

Aufgabe 20: Gamma-Algebra (*3+1+9=13 Punkte*)

Gamma-Matrizen spielen eine wichtige Rolle bei der Berechnung von Amplituden mit Fermionen. Für Rechnungen lassen sich einige nützliche Eigenschaften herleiten, die wir in dieser Aufgabe zeigen wollen. Diese benötigen nur die Clifford-Algebra,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_4 \,,$$

keine explizite Darstellung der γ-Matrizen.

(a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Gamma-Matrizen

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \cdot \mathbb{1}_4 \,, \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha \,, \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4 \,. \end{aligned}$$

(b) γ^5 wird üblicherweise definiert als $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.
Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist zu

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \,,$$

wobei $\epsilon_{0123} = -1$.

(c) Zeigen Sie die folgenden Identitäten von Spuren von γ-Matrizen:
- (i) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu] = 0$,
- (ii) $\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n}] = 0$, falls n ungerade ist,
- (iii) $\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n}] = \mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_n} \cdots \gamma^{\mu_1}]$,
- (iv) $\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\beta] = 4g^{\alpha\beta}$,
- (v) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$,
- (vi) $\mathrm{Tr}[\gamma^5] = 0$,
- (vii) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5] = 0$,
- (viii) $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Aufgabe 21: Zwei-Teilchen-Phasenraum (*7 Punkte*)

Zur Berechnung von Zerfallsraten und Wirkungsquerschnitten benötigen wir eine Integration über den Phasenraum der Teilchen im Endzustand. Dieses Phasenraumintegral ist für einen allgemeinen Prozess mit zwei Teilchen (Impulse p_1, p_2, Massen m_1, m_2) im Endzustand gegeben durch

$$\int \mathrm{d}\Phi_2 = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2)\,,$$

wobei q der Viererimpuls der einlaufenden Teilchen ist. Dieses Integral wirkt auf das quadrierte Matrixelement sowie eine Stufenfunktion, die die Schnitte an die Endzustandsteilchen repräsentiert.
Zeigen Sie, dass

$$\int \mathrm{d}\Phi_2 = \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{1}{32\pi^2 q^2} \lambda(q^2, m_1^2, m_2^2) \Theta(q_0) \Theta(q^2 - (m_1 + m_2)^2)$$

mit

$$\lambda(a^2, b^2, c^2) = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}$$

und der Heaviside-Stufenfunktion Θ gilt. Dabei ist $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}(\cos\vartheta_1)\mathrm{d}\varphi_1$ die Integration über den Raumwinkel von Teilchen 1 im Schwerpunktsystem. Die Funktion λ beschreibt den Impuls der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{\lambda(q^2, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{q^2}}$.

Hinweise:

- *Verwenden Sie die Beziehung*

$$\frac{\mathrm{d}^3 p}{2E} = \mathrm{d}^4 p\, \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2)\,.$$

- *Arbeiten Sie im Schwerpunktsystem der beiden Endzustandsteilchen.*