Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. M. Rauch

Übungsblatt 12

Besprechung: Mi, 26.07. - Do, 27.07.17

Aufgabe 24: Myon-Zerfall (*10+2+3+2+2+1=20 Punkte*)

Wir untersuchen den schwachen Zerfall eines Myons mit Impuls p_1

$$\mu^-(p_1) \longrightarrow \nu_\mu(p_2) + e^-(p_3) + \bar{\nu}_e(p_4)\,.$$

In der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung enthält das dazugehörige Matrixelement den Austausch eines W^--Bosons mit Impuls $q = p_1 - p_2 = p_3 + p_4$ und lautet

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p_2)\frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}u(p_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - M_W^2}\bar{u}(p_3)\frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma^\nu\frac{1-\gamma^5}{2}v(p_4)\ .$$

Darin ist $g = e/\sin\vartheta_W$ die schwache Kopplung mit der Positronladung e und dem Weinbergwinkel ϑ_W. Die maßgebliche Impulsskala ist die Myonenmasse, so dass wir in guter Näherung

$$m_\mu^2 \sim q^2 \ll M_W^2$$

annehmen können. Die Masse der Elektronen und Neutrinos können wir ebenfalls vernachlässigen.

Damit erhalten wir das Matrixelement einer Vierpunktwechselwirkung

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\,\bar{u}(p_2)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)\,\bar{u}(p_3)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_4)\,,$$

wobei wir die *Fermikonstante* $G_F/\sqrt{2} = g^2/(8M_W^2)$ eingeführt haben. Durch Mittelung über einlaufende und Summation über auslaufende Spins können wir das Matrixelement durch Spuren über die Dirac-Matrizen ausdrücken:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_F^2}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\not{p}_2\gamma^\mu(1-\gamma^5)(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma^\nu(1-\gamma^5)\right]\,\mathrm{Tr}\left[\not{p}_3\gamma^\rho(1-\gamma^5)\not{p}_4\gamma^\sigma(1-\gamma^5)\right]g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Spuren mit Hilfe der Spurtheoreme, die Sie in Aufgabe 20 bewiesen haben und zeigen Sie, dass

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 64 G_F^2 (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)\,.$$

Hinweis:
Sie benötigen die folgende Kontraktion zweier antisymmetrischer Tensoren,

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2\left(g^{\mu}{}_{\rho}g^{\nu}{}_{\sigma} - g^{\mu}{}_{\sigma}g^{\nu}{}_{\rho}\right)\,.$$

Im folgenden berechnen wir nun das Spektrum der Energie des emittierten Elektrons sowie die Zerfallsrate. Die differenzielle Breite lautet

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{2E_1}\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\mathrm{d}\Phi_3\,,$$

mit dem Dreiteilchenphasenraum

$$\mathrm{d}\Phi_3 = \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)\,.$$

Im folgenden arbeiten wir im Ruhesystem des Myons ($p_1 = (m, \vec{0})$).

(b) Drücken Sie $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ nur durch die Myonmasse m und E_4 aus.

(c) Nutzen Sie die impulserhaltende Deltafunktion, um analog zum Vorgehen im Zwei-Teilchen-Phasenraum (Aufgabe 21) die Integration über $\mathrm{d}^3\vec{p}_2$ auszuführen. Die Impulserhaltung ist jetzt implizit. Führen Sie dann die verbleibenden Integrationen aus, so dass nur noch Integrationen über die Energien E_3 und E_4 von e^- und $\bar{\nu}_e$ bleiben.

(d) Legen Sie aufgrund der (impliziten) δ- und Θ-Funktionen die Integrationsgrenzen für E_3 und E_4 fest.
Hinweis: Gehen Sie von den Grenzfällen aus, in denen wir praktisch nur noch Zweikörperzerfälle haben.

(e) Berechnen Sie das Energiespektrum $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}E_3$ der emittierten Elektronen.

(f) Berechnen Sie die totale Zerfallsrate Γ.
Vergleichen Sie die Lebensdauer $\tau = \hbar/\Gamma$ mit dem experimentell bestimmten Wert.

Die dafür benötigten Werte sind:

$$\begin{aligned}
\tau_\mu &= 2.1969811(22)\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}\,,\\
m_\mu &= 0.1056583745(24)\,\mathrm{GeV}\,,\\
G_F &= 1.1663787(6)\cdot 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}\,,\\
\hbar &= 6.582119514(40)\cdot 10^{-25}\,\mathrm{GeV\,s}\,.
\end{aligned}$$

(aus: C. Patrignani et al. [Particle Data Group], "Review of Particle Physics," Chin. Phys. C **40** *(2016) no.10, 100001)*