Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 2

Besprechung: Mi, 10.05.17

Aufgabe 2: Chirale Fermionen (*3+4+4=11 Punkte*)

Betrachten Sie ein Fermion der Masse m mit Viererimpuls $(E, p_x, p_y, p_z)^T$. Außerdem sei

$$\chi_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|(|\vec{p}| + p_z)}} \begin{pmatrix} |\vec{p}| + p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} ,$$
$$\chi_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|(|\vec{p}| + p_z)}} \begin{pmatrix} -p_x + ip_y \\ |\vec{p}| + p_z \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass χ_+ und χ_- Weyl-Spinoren der Helizität $+\frac{1}{2}$ bzw. $-\frac{1}{2}$ sind, also dass gilt

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi_\pm(p) = \pm \chi_\pm(p) .$$

(b) Überprüfen Sie, dass (in der chiralen Darstellung der Dirac-Matrizen)

$$u(p, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - \lambda|\vec{p}|}\ \chi_\lambda(p) \\ \sqrt{E + \lambda|\vec{p}|}\ \chi_\lambda(p) \end{pmatrix}$$

und

$$v(p, \lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{E + \lambda|\vec{p}|}\ \chi_{-\lambda}(p) \\ \lambda\sqrt{E - \lambda|\vec{p}|}\ \chi_{-\lambda}(p) \end{pmatrix}$$

die Dirac-Gleichung für u- bzw. v-Spinoren erfüllen.

(c) Überprüfen Sie die Orthogonalitätsrelationen

$$\bar{v}(p, \lambda) v(p, \lambda') = -2m\delta_{\lambda\lambda'} \quad \text{und}$$
$$\bar{v}(p, \lambda) u(p, \lambda') = 0 .$$

Aufgabe 3: Lagrangedichte des Vektorfelds (*4+1+1+3=9 Punkte*)

Die Lagrangedichte eines Vektorfelds $V^\mu(x)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu$$

mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu$.

(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für V^μ her.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Bewegungsgleichung, dass

$$\partial_\mu V^\mu = 0\,.$$

(c) Benutzen Sie die Ergebnisse von (a) und (b) um zu zeigen, dass die Komponenten von V die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)V^\mu = 0$$

erfüllen.

Eine neue Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_D$ enthält jetzt den Dirac Term

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\left(i\not{D} - m\right)\psi(x)\,,$$

wobei die *kovariante Ableitung* $D_\mu = \partial_\mu + iqV_\mu$ eine Kopplung zwischen dem Spinor ψ und dem Vektorfeld V_μ bewirkt.

(d) Bestimmen Sie die neuen Feldgleichungen für ψ, $\bar{\psi}$ und V_μ.