Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 3

Besprechung: Mi, 17.05. - Do, 18.05.17

Aufgabe 4: SU(N) **Darstellungen** (*4+2+2+2+2+2+3+1+2=20 Punkte*)

Die Generatoren T^a der *fundamentalen Darstellung* der SU(N) haben folgende Form:

$$T^a_{ij}\,, \qquad a = 1, \ldots, N^2-1\,, \qquad i,j = 1,\ldots,N\,.$$

Sie sind hermitesch, $T^{a\dagger} = T^a$, und spurlos, $\mathrm{Tr}(T^a) = 0$.
Für die beiden niedrigsten Werte, $N = 2$ und $N = 3$, die in der Teilchenphysik eine wichtige Rolle spielen, ist die Darstellung proportional zu den

- SU(2): Pauli-Matrizen, $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$,
- SU(3): Gell-Mann-Matrizen, $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$.

Die Generatoren sind durch die Beziehung

$$\mathrm{Tr}\left(T^a T^b\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

normiert.
Sie erfüllen die folgenden Vertauschungs- und Antivertauschungsrelationen,

$$\left[T^a, T^b\right] = i f_{abc} T^c\,, \tag{1}$$

$$\left\{T^a, T^b\right\} = \frac{1}{N}\,\delta^{ab}\,\mathbb{1}_N + d_{abc}T^c\,, \tag{2}$$

wodurch die total antisymmetrischen SU(N) Strukturkonstanten f_{abc} und die total symmetrischen d_{abc} Symbole definiert sind. Die Vertauschungsrelation Gl. (1) ist für jede Darstellung der SU(N) erfüllt, nicht jedoch Gl. (2).
Jede beliebige, komplexe, $N \times N$-Matrix M kann als Linearkombination der N^2-1 Generatoren und der Einheitsmatrix geschrieben werden,

$$M = c_0\mathbb{1} + \sum_{a=1}^{N^2-1} c_a T^a\,. \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass aus der Vollständigkeitsrelation, Gl. (3), und den Spurbedingungen für die Generatoren der fundamentalen Darstellung, T^a, die Fierz-Identität für die SU(N) folgt,

$$T^a_{ij}T^a_{kl} \equiv \sum_{a=1}^{N^2-1} T^a_{ij}T^a_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{2N}\delta_{ij}\delta_{kl}\,. \tag{4}$$

(b) Zeigen Sie für eine beliebige Darstellung der SU(N), dass

$$C_2 = T^aT^a \equiv \sum_{a=1}^{N^2-1} T^aT^a$$

eine Casimir-Invariante ist, d.h. dass $[C_2, T^a] = 0$ für alle Generatoren T^a.

(c) Zeigen Sie, dass aus der Hermitezität der Generatoren folgt, dass die Strukturkonstanten f_{abc} und die d_{abc} Symbole reell sind.

(d) Zeigen Sie, dass die $N \times N$ Matrizen

$$\mathcal{T}^a = -T^{a*}$$

eine Darstellung der Lie Algebra der SU(N) sind. D.h. die Matrizen erfüllen eine zu Gl. (1) analoge Vertauschungsrelation. (Beachten Sie, dass T^{a*} die komplex konjugierte Matrix ist, *nicht* die hermitesch konjugierte!). Diese $\mathcal{T}^a$ sind Generatoren der $\bar{N}$ („N–bar“) Darstellung der SU(N), mit Darstellungsmatrizen $U(\vartheta)^*$.

(e) Berechnen Sie den Wert von C_2 sowohl für die fundamentale Darstellung (N) als auch für die ($\bar{N}$)–Darstellung.

(f) Leiten Sie aus der Jacobi-Identität für gemischte Vertauscher und Antivertauscher

$$[A, \{B, C\}] + [B, \{C, A\}] + [C, \{A, B\}] = 0$$

eine Beziehung zwischen den f_{abc} und den d_{abc} her, analog zu der in der Vorlesung diskutierten Beziehung zwischen den f_{abc}.

(g) Zeigen Sie mit dem Ergebnis der vorhergehenden Teilaufgabe, dass

$$C_3 = d_{abc}T^aT^bT^c$$

eine Casimir-Invariante der SU(N) ist.

(h) Verwenden Sie Gl. (4), um die Summe über a in

$$T^aT^bT^a$$

auszuführen.

(i) Bestimmen Sie den Wert von C_3 für die (N)- und die ($\bar{N}$)-Darstellungen. Das Ergebnis zeigt, dass (N) und ($\bar{N}$) für $N > 2$ keine äquivalenten Darstellungen mehr sind.