Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 4

Besprechung: Mi, 24.05.17

Wegen des Feiertags findet die Übung am Donnerstag, Gruppe 3, diese Woche nicht statt. Bitte besuchen Sie eine der beiden Übungen am Mittwoch.

Aufgabe 5: Lorentzgruppe (*3+4+3=10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie aus den Generatoren

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

die Lie–Algebra der SO(3,1), d.h. zeigen Sie, dass

$$[L_{\mu\nu},\, L_{\rho\sigma}] = i\left(g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} + g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho}\right)\,.$$

(b) Die Generatoren $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ ($= L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$, wobei $S_{\mu\nu}$ den Spinanteil bezeichnet), erfüllen die Lie–Algebra aus (a). Verifizieren Sie die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}\left[K^i, K^j\right] &= -i\epsilon^{ijk} J^k\,,\\ \left[J^i, K^j\right] &= i\epsilon^{ijk} K^k\,,\end{aligned}$$

für die Generatoren von Boosts,

$$K^i = M^{0i}\,,$$

und Drehungen

$$J^i = \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk} M_{jk} \qquad\qquad (\epsilon^{123} = +1)\,.$$

(c) Leiten Sie die folgenden Vertauschungsrelationen der Operatoren

$$N^i = \frac{1}{2}(J^i + iK^i) \qquad \text{und} \qquad N^{i\dagger} = \frac{1}{2}(J^i - iK^i)$$

her:

$$\begin{aligned}\left[N^i,\, N^{j\dagger}\right] &= 0\,,\\ \left[N^i,\, N^j\right] &= i\epsilon^{ijk} N^k\,,\\ \left[N^{i\dagger},\, N^{j\dagger}\right] &= i\epsilon^{ijk} N^{k\dagger}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Lorentz-Transformation von Weyl-Spinoren (*4 Punkte*)

Die Lorentz-Transformation von links- bzw. rechtshändigen Spinorfeldern erfolgt via

$$\Lambda_L = e^{-i\frac{\vec{\sigma}}{2}(\vec{\omega}+i\vec{\nu})}\,, \qquad\qquad \Lambda_R = e^{-i\frac{\vec{\sigma}}{2}(\vec{\omega}-i\vec{\nu})}\,.$$

Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\Lambda_L^{-1} = \Lambda_R^\dagger$,

(b) $\sigma^2 \Lambda_L \sigma^2 = \Lambda_R^*$,

(c) $\Lambda_L^T = \sigma^2 \Lambda_L^{-1} \sigma^2$.

Aufgabe 7: Lorentz-Boosts (*1+4+1=6 Punkte*)

Wir betrachten den Boost–Operator

$$K^1 = K_x = -i\left(t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}\right)\,.$$

(a) Berechnen Sie die Wirkung von K_x und K_x^2 auf den Vierervektor $x^\mu = (t, x, y, z)^T$.

(b) Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von (a) die endliche Lorentztransformation

$$x^{\mu\prime} = \left(e^{i\nu K_x}\right) x^\mu\,.$$

Üblicherweise wird dieser Boost durch den Boostparameter $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ als

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

geschrieben.

(c) Zeigen Sie, dass die *Rapidität* ν durch

$$\nu = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

gegeben ist.