KIT **SS 2017**

Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 5

Besprechung: Mi, 31.05. - Do, 01.06.17

Aufgabe 8: Invarianz der Lagrangedichte (*4 Punkte*)

Betrachten Sie die folgenden beiden Lagrangedichten $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu \varphi_i(x))$ und

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \partial_\mu \Lambda^\mu \,,$$

wobei Λ^μ eine beliebige Funktion der Felder $\varphi_i(x)$ ist, aber nicht von $\partial_\mu \varphi_i(x)$ abhängt. Zeigen Sie, dass beide Lagrangedichten auf dieselben Bewegungsgleichungen führen.

Aufgabe 9: Noether-Theorem (*4 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte zweier reeller Skalarfelder $\varphi_{1,2}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu \varphi_1)^2 + (\partial_\mu \varphi_2)^2\right) - \frac{m^2}{2}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)^2$$

invariant unter der Transformation ($\vartheta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\to \varphi_1' = \varphi_1 \cos\vartheta - \varphi_2 \sin\vartheta & \qquad x_\mu &\to x_\mu' = x_\mu \\ \varphi_2 &\to \varphi_2' = \varphi_1 \sin\vartheta + \varphi_2 \cos\vartheta \end{aligned}$$

ist.
Berechnen Sie den zugehörigen Noether-Strom

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \delta\varphi_i - T^{\mu\nu} \delta x_\nu$$

mit

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} (\partial^\nu \varphi_i) - \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

und die Noether-Ladung

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x J^0 \,.$$

Aufgabe 10: Sigma-Modell (*5+1+5+1=12 Punkte*)

Das „σ–Modell“ beschreibt ein masseloses Dirac-Feld ψ, das an ein komplexes skalares Feld $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\pi)$ koppelt. Die Lagrangedichte des Modells lautet

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_I \,,$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \,, \\ \mathcal{L}_\varphi &= (\partial_\mu \varphi^\dagger)(\partial^\mu \varphi) - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \,.\end{aligned}$$

Der Wechselwirkungsterm lautet

$$\mathcal{L}_I = g(\bar{\psi}\psi\sigma + i\bar{\psi}\gamma^5\psi\pi) \,.$$

(a) Abgesehen von der einfachen Phasentransformation $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ ist die Lagrangedichte $\mathcal{L}_\psi$ für sich genommen auch unter der *chiralen Transformation*

$$\psi \to e^{i\beta\gamma^5}\psi \,, \qquad \psi^\dagger \to \psi^\dagger e^{-i\beta\gamma^5}$$

invariant. Zeigen Sie diese Eigenschaft und bestimmen Sie den für $g = 0$ erhaltenen Strom.

(b) Welcher Strom resultiert für $g = 0$ aus der Invarianz von $\mathcal{L}_\varphi$ unter der folgenden Transformation

$$\varphi \to e^{i\vartheta}\varphi \,, \qquad \varphi^\dagger \to e^{-i\vartheta}\varphi^\dagger \,?$$

(c) Bei $g \neq 0$ lassen die beiden Transformation aus (a) und (b) die volle Lagrangedichte $\mathcal{L}$ nicht mehr invariant. $\mathcal{L}$ bleibt jedoch bei einer *simultanen* Transformation von $\psi, \psi^\dagger$ und $\varphi, \varphi^\dagger$ invariant. Bestimmen Sie die lineare Beziehung zwischen β und ϑ, die $\mathcal{L}$ invariant lässt.

(d) Diese Relation zwischen β und ϑ definiert eine Symmetrie von $\mathcal{L}$ bei $g \neq 0$. Bestimmen Sie den dazugehörigen erhaltenen Strom.

Eine etwas komplexere Variante dieses Modells, mit 2 Spinorfeldern (Proton und Neutron) sowie zwei komplexen Skalaren (π^+ und π^-, π^0 und σ) beschreibt die chiralen Transformationseigenschaften der starken Wechselwirkung. Diese chirale Symmetrie ist spontan gebrochen, mit den Pionen als Goldstone-Bosonen — dazu später mehr!