Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 6

Besprechung: Do, 08.06. & Mi, 14.06.17

Aufgrund der Antrittsvorlesung am 07.06. und des Feiertags am 15.06. finden an den beiden Tagen die jeweiligen Übungen nicht statt. Die Besprechung des Blatts erfolgt am Donnerstag, 08.06., für Gruppe 3 und am Mittwoch, 14.06., für Gruppe 1 und 2.

Aufgabe 11: Dilatation für ein reelles Skalarfeld (*1+1+3+1+3+1=10 Punkte*)

Betrachten Sie die Lagrangedichte eines reellen skalaren Felds φ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \, .$$

(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für φ her.

(b) Berechnen Sie den Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ für $m = 0$ invariant unter Dilatationen ist, d.h. $\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}$ ist invariant unter der Transformation

$$x'_\mu = e^{-\alpha} x_\mu \, , \qquad \varphi'(x') = e^{\alpha}\varphi(x) \, .$$

(d) Zeigen Sie, dass für $m = 0$ der zur Invarianz unter Dilatationen gehörige Noether-Strom gegeben ist durch

$$j^\mu_D = T^{\mu\alpha} x_\alpha + \frac{1}{2}\partial^\mu \varphi^2 \, .$$

(e) Benutzen Sie den Energie-Impuls-Tensor und die Bewegungsgleichungen, um für den massiven Fall zu zeigen, dass gilt

$$\partial_\mu j^\mu_D = m^2 \varphi^2 \, . \tag{1}$$

D.h., nur der Massenterm verletzt die Invarianz unter Dilatationen.

(f) Leiten Sie Gl. 1 erneut her, indem Sie die Variation von $\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}$ unter infinitesimalen Dilatationen betrachten.

Aufgabe 12: Drehimpuls für das Diracfeld (*4+1=5 Punkte*)

Die Lorentz-Transformation eines freien Diracfeldes $\psi(x)$ mit Masse m ist gegeben durch

$$\psi(x) \to \psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$$

mit $S(\Lambda) = \exp(-\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu})$ und $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.
Wir betrachten zunächst nur Drehungen um die z-Achse mit einem Winkel ϑ, sodass $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \vartheta$ die beiden einzigen nichtverschwindenden Elemente von ϵ sind.

(a) Berechnen Sie die Zeit-Komponente j^0 des zugehörigen erhaltenen Noether-Stroms für das freie Dirac-Feld. Identifizieren Sie im Ergebnis den normalen quantenmechanischen L_z+S_z-Operator.

(b) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf Drehungen um eine beliebige Achse und geben Sie die zugehörige Noether-Ladung an, welche der Drehimpulsoperator für das Dirac-Feld ist. Benutzen Sie dazu auch den Spinoperator

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13: Transformation der kovarianten Ableitung (*5 Punkte*)

Die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T^a$$

ist von der gewählten Darstellung der Generatoren T^a der Eichgruppe explizit abhängig. Nun nehmen wir die Transformation von kovarianter Ableitung und Eichfeld

$$D'_\mu = UD_\mu U^{-1}, \qquad A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}U(\partial_\mu U^{-1})$$

mit Darstellungsmatrizen $U = \exp(i\vartheta^a T^a)$ aus der *fundamentalen* Darstellung an.
Zeigen Sie, dass sich damit die kovariante Ableitung für *jede beliebige* Darstellung V wie

$$D'_\mu = VD_\mu V^{-1}$$

transformiert.
Hinweise:
Verwenden Sie das Baker–Hausdorff Theorem

$$\mathrm{e}^B A \mathrm{e}^{-B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A_n$$

mit $A_n = [B, A_{n-1}], A_0 = A$. *Darin sind* $A = A_\mu$ *bzw.* $A = \partial_\mu$ *sowie* $B = i\vartheta^a T^a$.

Ausgehend von

$$D'_\mu = V\left(\partial_\mu + igA_\mu\right)V^{-1} = \partial_\mu + V(\partial_\mu V^{-1}) + igVA_\mu V^{-1}$$

können Sie die rechte Seite so umformen, dass die Transformation der A_μ *unter der adjungierten Darstellung explizit auftaucht.*