Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 7

Besprechung: Mi, 21.06. - Do, 22.06.17

Aufgabe 14: Vakuum-Fluktuationen (*1+5=6 Punkte*)

Wir betrachten ein quantisiertes, reelles Klein-Gordon Feld. Das Feld werde zur Zeit $t = 0$ über eine Kugel vom Radius R gemittelt ($V = \frac{4\pi}{3} R^3$),

$$\varphi_R = \frac{1}{V} \int_{|\vec{x}|<R} \mathrm{d}^3x \, \varphi(\vec{x}) \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass der Vakuum-Erwartungswert (vacuum expectation value, VEV) von φ_R verschwindet,
$$\langle 0| \, \varphi_R \, |0\rangle = 0 \, .$$

(b) Berechnen Sie
$$\langle 0| \, \varphi_R^2 \, |0\rangle \ .$$
Da der VEV von φ_R zwar verschwindet, nicht aber der VEV von φ_R^2, kann das Feld selbst im Vakuum nicht konstant sein. Es *fluktuiert* vielmehr innerhalb der gegebenen Kugel vom Radius R.
Betrachten Sie anschließend den Fall $m = 0$. Muss R vergrößert oder verkleinert werden, um die Fluktuationen zu vergrößern?

Hinweis: Das folgende Integral der Bessel–Funktion

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

ist nützlich:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{a^2 + y^2}} \left[J_{3/2}(y) \right]^2 \ .$$

Für $a = 0$ gilt

$$I(0) = \frac{1}{2\pi} \, .$$

Aufgabe 15: Impulsoperator und Ladung des Dirac-Feldes (*10+4=14 Punkte*)

Die allgemeine Lösung der Diracgleichung wird wie folgt in ebene Wellen entwickelt (s. Vorlesung),

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi^3) 2E_p} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[c_\alpha(p) u_\alpha(p) e^{-ip\cdot x} + d_\alpha^\dagger(p) v_\alpha(p) e^{ip\cdot x} \right] \ .$$

Darin sind $u_{(1,2)}$ und $v_{(1,2)}$ die Spinoren zu positiver und negativer Energie. $c_{(1,2)}$ und $d_{(1,2)}$ sind hier zunächst einfach Entwicklungskoeffizienten, über die wir keine weiteren Annahmen machen wollen. Insbesondere sollen c_α und d_α nicht unbedingt (anti-)vertauschbar sein.

(a) Drücken Sie den Impuls des Diracfeldes,

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3 x \, T^{0\mu} \, ,$$

durch $c_\alpha(p)$, $c_\alpha^\dagger(p)$, $d_\alpha(p)$, $d_\alpha^\dagger(p)$ aus.
Berechnen Sie dazu auch die auftretenden Kombinationen der u- und v-Spinoren.

(b) Die Ladung des Diracfeldes ist gegeben durch

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x \, \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) \, .$$

Drücken Sie diese ebenfalls durch $c_\alpha(p)$, $c_\alpha^\dagger(p)$, $d_\alpha(p)$, $d_\alpha^\dagger(p)$ aus.