Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. M. Rauch

Übungsblatt 8

Besprechung: Mi, 28.06. - Do, 29.06.17

Aufgabe 16: Gordon-Identitäten (*5+1=6 Punkte*)

Die Gordon-Identitäten geben Relationen zwischen verschiedenen Fermion-Bilinearen, wenn die Felder Lösungen der freien Dirac Gleichung sind.

(a) Verwenden Sie die Dirac-Gleichung, um die folgenden Gordon-Identitäten zu beweisen:

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{u}(p)\left[(p-q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p+q)_\nu\right]u(q)\ , \\
\bar{u}(p)\gamma^\mu u(q) &= \frac{1}{2m}\bar{u}(p)\left[(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu\right]u(q)\ , \\
\bar{u}(p)\gamma^\mu\gamma^5 u(q) &= \frac{1}{2m}\bar{u}(p)\left[(p-q)^\mu\gamma^5 + i\sigma^{\mu\nu}(p+q)_\nu\gamma^5\right]u(q)\ .
\end{aligned}$$

Darin ist $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Beachten Sie, dass γ^5 mit den anderen Dirac–Matrizen antivertauscht, $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$.

(b) Wie lauten die analogen Relationen für v–Spinoren?

Aufgabe 17: Formfaktor des Protons (*5+3+3+2+1=14 Punkte*)

(a) $\psi(x)$ sei ein freies Dirac-Feld der Masse m. $|p,\lambda\rangle\,, |p',\lambda'\rangle$ sind zwei Einfermionzustände zu festem Impuls und fester Helizität. Bestimmen Sie das Matrixelement

$$\langle p',\lambda'|\, j^\mu(x)\, |p,\lambda\rangle$$

des elektromagnetischen Stroms

$$j^\mu(x) = e\ :\ \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\ :\ .$$

Zeigen Sie, dass der resultierende Strom erhalten ist.

(b) Das Proton als Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen kann ebenfalls als Diracfeld der Masse m geschrieben werden. Wegen der inneren Struktur des Protons hat das Matrixelement für die Kopplung des Protons an einen elektromagnetischen Strom jedoch nicht eine so einfache Form wie in (a). In allgemeinster Form lautet ein paritätserhaltender Strom bei Kopplung an das Proton vielmehr

$$\langle p', \lambda' | \, j^\mu(x) \, | p, \lambda \rangle = e^{-i(p-p')\cdot x} \bar{u}(p', \lambda') \left[p^\mu A + p'^\mu B + \gamma^\mu C + \sigma^{\mu\nu} p_\nu D + \sigma^{\mu\nu} p'_\nu E \right] u(p, \lambda) \, .$$

Darin sind $A, \ldots, E$ Lorentz-invariante, komplexe Funktionen von q^2, die auch Formfaktoren genannt werden. $q = p' - p$ ist der Impulsübertrag zwischen ein- und auslaufendem Proton.
Zeigen Sie mit Hilfe der Gordon-Identitäten aus Aufgabe 16, dass die Formfaktoren $A(q^2)$ und $B(q^2)$ durch eine Neudefinition in den Faktoren C, D, E absorbiert werden können, so dass man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $A = B = 0$ setzen kann.

(c) Der Strom ist hermitesch, also $j^\mu(x)^\dagger = j^\mu(x)$. Leiten Sie daraus Beziehungen zwischen den Real- und Imaginärteilen von $C(q^2), D(q^2)$ und $E(q^2)$ her.

(d) Welche weiteren Beziehungen folgen aus der Stromerhaltung $\partial_\mu \langle p', \lambda' | \, j^\mu(x) \, | p, \lambda \rangle = 0$?

(e) Zeigen Sie, dass der Strom mit den bisher gefundenen Relationen und den beiden reellen Funktionen $F_1(q^2), F_2(q^2)$ als

$$\langle p', \lambda' | \, j^\mu(x) \, | p, \lambda \rangle = e^{-i(p-p')\cdot x} \bar{u}(p', \lambda') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \right] u(p, \lambda)$$

geschrieben werden kann. Geben Sie die Relationen zwischen F_1, F_2 und den $A, \ldots, E$ explizit an.
Bemerkung: $F_1(0)$ ist die elektrische Ladung des Protons (in Einheiten von e) und

$$\frac{e}{2m} \left(F_1(0) + F_2(0) \right)$$

das magnetische Dipolmoment. Die Formfaktoren wurden in elastischer ep Streuung vermessen. In guter Näherung erhält man

$$F_1(q^2) + \frac{q^2}{4m^2} F_2(q^2) \equiv G_E(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{0.71 \, \mathrm{GeV}^2} \right)^{-2} \, .$$