Theoretische Teilchenphysik 1

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. M. Rauch

Übungsblatt 9

Besprechung: Mi, 05.07. - Do, 06.07.17

Aufgabe 18: Ladungskonjugation *(2+3+1+3=9 Punkte)*

Die definierende Eigenschaft der Ladungskonjugationsmatrix C ist

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\left(\gamma^\mu\right)^T \,. \tag{1}$$

(a) Verifizieren Sie explizit, dass in der chiralen Darstellung $C = -i\gamma^0\gamma^2$ diese Eigenschaft besitzt.

(b) Zeigen Sie für beliebige Darstellungen, also allein unter Benutzung von Gl. (1), dass

$$\begin{aligned} C^{-1}\gamma^5 C &= \left(\gamma^5\right)^T \,, \\ C^{-1}\sigma^{\mu\nu} C &= -\left(\sigma^{\mu\nu}\right)^T \,, \\ C^{-1}\left(\gamma^\mu\gamma^5\right) C &= \left(\gamma^\mu\gamma^5\right)^T \,. \end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ als Definition von γ^5.

(c) Zeigen Sie aus $\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^\dagger = C\bar{\psi}^T(x)$ und $\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger = (\gamma^0)^T$, dass

$$\mathcal{C}\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^\dagger = -\psi^T(x)C^{-1} \,.$$

(d) Verifizieren Sie mit diesen Ergebnissen die Eigenschaften der Fermion-Bilinearen unter Ladungstransformation,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\!:\!\bar{\psi}(x)\psi(x)\!:\!\mathcal{C}^\dagger &= \;\; :\!\bar{\psi}(x)\psi(x)\!: &&= \;\; S(x) \,, \\ \mathcal{C}\!:\!\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\!:\!\mathcal{C}^\dagger &= -:\!\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\!: &&= -V^\mu(x) \,, \\ \mathcal{C}\!:\!\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)\!:\!\mathcal{C}^\dagger &= -:\!\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)\!: &&= -T^{\mu\nu}(x) \,, \\ \mathcal{C}\!:\!\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)\!:\!\mathcal{C}^\dagger &= \;\; :\!\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)\!: &&= \;\; A^\mu(x) \,, \\ \mathcal{C}\!:\!\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\!:\!\mathcal{C}^\dagger &= \;\; :\!\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\!: &&= \;\; P(x) \,. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $:\!\mathcal{O}\!:$ die Normalordnung des Operators $\mathcal{O}$ und soll hier lediglich explizit machen, dass in den Bilinearen quantisierte Dirac-Felder auftreten.

Aufgabe 19: Vakuum des Gupta–Bleuler Photons (*3+8=11 Punkte*)

Im Gupta-Bleuler Formalismus des freien Photonfeldes lautet der allgemeinste Vakuumzustand

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, |\varphi_n\rangle \ .$$

Darin enthalten die Zustände $|\varphi_n\rangle$ keine transversalen Photonen und genau n (skalare+longitudinale) Photonen. Die Zustände werden durch die weitere Bedingung

$$(a_3(k) - a_0(k)) \, |\varphi_n\rangle = 0$$

physikalische Zustände. Wir wählen weiterhin $|\varphi_0\rangle = |0\rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass die allgemeinste Form von $|\varphi_1\rangle$

$$|\varphi_1\rangle = \int \mathrm{d}\tilde{q} \, f(q) \left(a_3^\dagger(q) - a_0^\dagger(q) \right) |0\rangle$$

lautet.

(b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Photonfeldes im φ-Vakuum einer Eichung entspricht, also

$$\langle\varphi| \, A_\mu(x) \, |\varphi\rangle = \partial_\mu \Lambda(x) \, ,$$

wobei die Eichfunktion $\Lambda(x)$ mit den expliziten Polarisationsvektoren $\epsilon_0^\mu(k) = n^\mu$ und $\epsilon_3^\mu(k) = \frac{k^\mu}{k\cdot n} - n^\mu$ durch

$$\Lambda(x) = \int \frac{\mathrm{d}\tilde{k}}{k \cdot n} \, 2 \, \mathrm{Re} \left(i C_0^* C_1 e^{-ik\cdot x} f(k) \right)$$

gegeben ist. Darin ist $f(k)$ dasselbe wie in Teil (a). Die Eichfunktion $\Lambda(x)$ erfüllt $\Box\Lambda(x) = 0$ und kann durch Wahl des Vakuumzustandes $|\varphi\rangle$ beliebig gewählt werden.