Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 2 – Lösung

11. Oktober 2012, 08-10 Uhr

Aufgabe 1: Kurzfragen (*4+4+2=10 Punkte*)

(a) Die Transformationen und zugehörigen Erhaltungsgrößen sind:

- R Raumdrehungen → Drehimpulserhaltung
- $\vec{c}$ Raumverschiebungen → Impulserhaltung
- $\vec{V}$ Transformation in ein System, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber dem ursprünglichen bewegt / Transformation in ein anderes Inertialsystem → Schwerpunktsatz
- a Zeitverschiebung → Energieerhaltung

(b) F hängt nicht von x ab, also ist $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.
Wir betrachten die totale x-Ableitung der linken Seite

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} \\
&= \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{=0 \text{ nach Euler-Lagrange-Gl.}} \cdot y' \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$

(c) Der Satz von Steiner hat als Voraussetzung, dass der Ausgangs-Trägheitstensor im Schwerpunkt des Systems berechnet sein muss. Der Schwerpunkt des Halbrings liegt allerdings nicht im gedachten Mittelpunkt des Kreises, sondern $\frac{2}{\pi}R$ darüber.

Aufgabe 2: Symmetrietransformationen (*6+14=20 Punkte*)

(a) Die Lagrangefunktion des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\kappa}{2}x^2 \ .$$

Die führt auf die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ m\ddot{x} + \kappa x &= 0 \\ \ddot{x} &= -\frac{\kappa}{m}x \end{aligned}$$

Als Lösung wird der Schwingungsansatz benutzt

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{x} &= -\omega^2 x \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \\ \Rightarrow x &= A\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

(b) Aus der Transformation

$$x^* = x + \varepsilon a \cos(\omega t) \quad , \qquad t^* = t$$

lassen sich die folgenden Größen, die in den Gleichungen für das Noether-Theorem vorkommen, berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= \dot{x} - \varepsilon a\omega \sin(\omega t) & \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} &= 1 \\ \psi &= a\cos(\omega t) & \varphi &= 0 \\ \dot{\psi} &= -a\omega \sin(\omega t) \ . \end{aligned}$$

Zuerst muss geprüft werden, ob die Bedingungen des Noether-Theorems erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(L(x^*, \dot{x}^*, t^*)\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\right)_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial L}{\partial x}\psi + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\psi} \\ &= -\kappa x a \cos(\omega t) - m\dot{x}a\omega \sin(\omega t) \\ &= -a\frac{\kappa}{\omega}\left(x\omega\cos(\omega t) - \dot{x}\sin(\omega t)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(-a\sqrt{\kappa m}x\sin(\omega t)\right)}_{=f(x,t)} \ . \end{aligned}$$

Das Ergebnis lässt sich also als eine totale Zeitableitung schreiben und die Bedingung des verallgemeinerten Noether-Theorems ist erfüllt.
Dies setzen wir nun in die Formel für die Noether-Ladung ein:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\psi - f(x,t) \\ &= m\dot{x}a\cos(\omega t) + a\sqrt{\kappa m}x\sin(\omega t) \\ &= am\left(\dot{x}\cos(\omega t) + \omega x\sin(\omega t)\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Transversale Molekülschwingungen (*2+10+12+6=30 Punkte*)

(a) Die x_i bezeichnen die Auslenkungen aus der Ruhelage. Damit ist die kinetische Energie gegeben durch

$$T = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2 \ .$$

Zusammen mit dem Potential aus der Angabe führt dies auf die Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{\kappa}{2}\left((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2\right) \ .$$

(b) Translationsinvarianz bedeutet, dass sich die Bewegungsgleichungen bei einer gemeinsamen Verschiebung aller drei Massenpunkte um denselben Wert nicht ändern. Wir können uns folglich in den Schwerpunkt des Systems begeben, für den gilt

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0 \Rightarrow \quad x_2 = -2\frac{m_A}{m_B}x_1$$

Analog folgt aus der Symmetrie

$$x_1 = x_3 \ ,$$

was sich auch als Abspaltung der Rotationssymmetrie um den mittleren Massenpunkt verstehen lässt.
Dies setzen wir in die Lagrangefunktion ein:

$$\begin{aligned} L &= m_A\dot{x}_1^2 + \frac{m_B}{2}\left(-2\frac{m_A}{m_B}\dot{x}_1\right)^2 - \frac{\kappa}{2}\left(x_1 + 2\frac{m_A}{m_B}x_1\right)^2 \cdot 2 \\ &= \dot{x}_1^2\left(m_A + 2\frac{m_A^2}{m_B}\right) - \kappa x_1^2\left(1 + 2\frac{m_A}{m_B}\right)^2 \ . \end{aligned}$$

Mit der gegebenen Definition für δ, in die wir ebenfalls die obigen Beziehungen einsetzen,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{\ell}x_1\left(1 + 2\frac{m_A}{m_B}\right) \\ \dot{\delta} &= \frac{2}{\ell}\dot{x}_1\left(1 + 2\frac{m_A}{m_B}\right) \end{aligned}$$

ergibt dies

$$L = \frac{\ell^2 m_A}{4 \cdot \left(1 + 2\frac{m_A}{m_B}\right)} \dot{\delta}^2 - \frac{\ell^2 \kappa}{4} \delta^2 \ .$$

(c) Dies führt auf die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} - \frac{\partial L}{\partial \delta} &= 0 \\
\frac{\ell^2 m_A}{2 \cdot \left(1 + 2\frac{m_A}{m_B}\right)} \ddot{\delta} + \frac{\ell^2 \kappa}{2} \delta &= 0 \\
\ddot{\delta} &= -\frac{\kappa}{m_A} \left(1 + 2\frac{m_A}{m_B}\right) \delta
\end{aligned}$$

Diese kann über den üblichen Schwingungsansatz gelöst werden

$$\begin{aligned}
\delta &= A \sin(\omega t + \varphi_0) \\
\ddot{\delta} &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \delta \\
\Rightarrow \omega^2 &= \frac{\kappa}{m_A m_B} \left(2m_A + m_B\right) \ .
\end{aligned}$$

Die Schwingungsfrequenz ist also

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m_A m_B} \left(2m_A + m_B\right)} \ .$$

Auflösen der Gleichung für δ nach x_1 bzw. x_2 ergibt

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\ell \delta}{2 \cdot \left(1 + 2\frac{m_A}{m_B}\right)} \\
x_2 &= -2\frac{m_A}{m_B} \frac{\ell \delta}{2 \cdot \left(1 + 2\frac{m_A}{m_B}\right)} = -\frac{\ell \delta}{2 + \frac{m_B}{m_A}} \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt als Lösung für die x_i

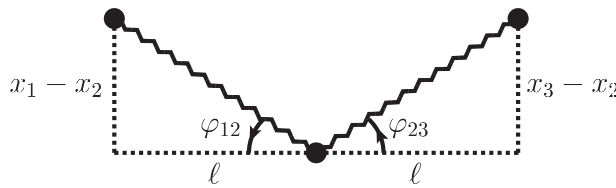
$$\begin{aligned}
x_1 = x_3 &= \frac{\ell}{2 \cdot \left(1 + 2\frac{m_A}{m_B}\right)} A \sin(\omega t + \varphi_0) \\
x_2 &= -\frac{\ell}{2 + \frac{m_B}{m_A}} A \sin(\omega t + \varphi_0) \ .
\end{aligned}$$

Dies beschreibt eine Biegeschwingung des Moleküls, bei der die beiden äußeren Massenpunkte parallel schwingen und der mittlere dagegen mit einer relativen Amplitude $2\frac{m_A}{m_B}$.

(d) Um die Bedeutung des Winkels δ zu verstehen, teilen wir diesen in zwei Teile auf:

$$\begin{aligned}\delta_{12} &= \frac{x_1 - x_2}{\ell} \\ \delta_{23} &= \frac{x_3 - x_2}{\ell} \\ \text{mit } \delta &= \delta_{12} + \delta_{23}\end{aligned}$$

Veranschaulicht man sich dies in einer Skizze,



so kann man erkennen, dass die beiden Winkel gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\frac{x_1 - x_2}{\ell} &= \tan\varphi_{12} \simeq \varphi_{12} \\ \frac{x_3 - x_2}{\ell} &= \tan\varphi_{23} \simeq \varphi_{23} \ .\end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt jeweils benutzt, dass die Auslenkungen der x_i aus der Ruhelage und damit auch die Winkel φ klein sind.
Der Winkel zwischen der Verbindungslinie der Punkte 1 und 2 und der Verbindungslinie der Punkte 2 und 3 ist also gegeben durch $\pi - \delta$.

Aufgabe 4: Abgeknickter Stab (*24+6=30 Punkte*)

(a) Zunächst berechnen wir die (Linien-)Dichte des Stabs

$$\begin{aligned}\varrho &= \frac{M}{L_{\text{tot}}} \qquad\qquad L_{\text{tot}} = 2L + L \\ &= \frac{M}{3L} \ .\end{aligned}$$

Der Trägheitstensor des geraden Teils (G) lässt sich direkt ausgehend vom Punkt A aus berechnen. Dieser ist parametrisiert durch $x = y = 0$, $z \in [0; 2L]$.
Daraus folgt sofort, dass alle außerdiagonalen Elemente genauso wie das zz-Element verschwinden

$$\Theta^G_{zz} = \Theta^G_{xy} = \Theta^G_{xz} = \Theta^G_{yz} = 0 \ .$$

Die beiden verbleibenden haben aus Symmetriegründen den gleichen Wert

$$\begin{aligned}\Theta^G_{xx} = \Theta^G_{yy} &= \int_V \mathrm{d}^3r\,\varrho(y^2+z^2)\\ &= \varrho\int_0^{2L}\mathrm{d}z z^2\\ &= \frac{M}{3L}\frac{8}{3}L^3\\ &= \frac{8ML^2}{9}\ .\end{aligned}$$

Für den abgeknickten Teil gilt analog die Parametrisierung $x\in[0;L]$, $y=0$, $z=2L$. Also verschwinden offensichtlich die beiden außerdiagonalen Elemente, die y enthalten

$$\Theta^K_{xy} = \Theta^K_{yz} = 0\ .$$

Die anderen werden explizit berechnet:

$$\begin{aligned}\Theta^K_{xx} &= \int_V \mathrm{d}^3r\,\varrho(y^2+z^2) = \varrho\int_0^L \mathrm{d}x(2L)^2 = \frac{M}{3L}4L^2\cdot L\\ &= \frac{4ML^2}{3}\\ \Theta^K_{zz} &= \int_V \mathrm{d}^3r\,\varrho(y^2+z^2) = \varrho\int_0^L \mathrm{d}x x^2 = \frac{M}{3L}\frac{L^3}{3}\\ &= \frac{ML^2}{9}\\ \Theta^K_{yy} &= \int_V \mathrm{d}^3r\,\varrho(x^2+z^2) = \varrho\int_0^L \mathrm{d}x(x^2+(2L)^2) = \frac{M}{3L}\left(\frac{L^3}{3}+4L^3\right)\\ &= \frac{13ML^2}{9}\\ \Theta^K_{xz} &= -\int_V \mathrm{d}^3r\,\varrho xz = -\varrho\int_0^L \mathrm{d}x(2L) = -\frac{M}{3L}\frac{2L^3}{2}\\ &= -\frac{ML^2}{3}\ .\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich dann für den Trägheitstensor

$$\Theta = \Theta^G + \Theta^K = \frac{ML^2}{9}\begin{pmatrix}20 & 0 & -3\\ 0 & 21 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\ .$$

(b) Für das Drehmoment gilt:

$$\vec{M}_A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} \qquad\qquad \text{mit } \vec{L} = \Theta\vec{\omega} = \Theta\omega\vec{e}_z$$

Im körperfesten System ergibt sich dann $\vec{L}$ zu

$$\vec{L} = \frac{ML^2}{9}\omega \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Daraus folgt für $\vec{M}_A$

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{IS}} \vec{L} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{KS}} \vec{L} + \vec{\omega} \times \vec{L} \\ &= \frac{ML^2}{9} \begin{pmatrix} -3\dot{\omega} \\ -3\omega^2 \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Minimalflächen (*5+7+9+7+2=30 Punkte*)

(a) Um die Oberfläche zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Kreisumfang am Punkt x. Dieser ist gegeben durch $U(x) = 2\pi y(x)$, wobei y den Radius am Punkt x beschreibt.
Für die Fläche muss diese Größe von $x_1 = -L$ nach $x_2 = +L$ integriert werden:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \mathrm{d}s U(x) \qquad\qquad \mathrm{d}s = \mathrm{d}x\sqrt{1+y'^2} \\ &= 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x y\sqrt{1+y'^2} \\ &= J[y] \text{ minimal} \end{aligned}$$

(b) Wir haben also ein Variationsproblem (ohne Nebenbedingung) mit der Funktion

$$F = y\sqrt{1+y'^2} \ .$$

Da F keine explizite x-Abhängigkeit besitzt, können wir benutzen:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} y\sqrt{1+y'^2} - yy'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= C \\ y &= C\sqrt{1+y'^2} \\ y'^2 &= \frac{y^2}{C^2} - 1 \\ y' &= \pm\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1} \end{aligned}$$

(c) Wir betrachten zunächst nur den Bereich $x > 0$, in dem gilt $y' > 0$. Die Gleichung der vorhergehenden Teilaufgabe wird durch Separation der Variablen integriert, wobei wir die Größe $y_0 = y(x = 0)$ einführen.

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{d}x &= \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}\tilde{y} \frac{C}{\sqrt{\tilde{y}^2 - C^2}} \\
x &= C \left[\ln \left(\tilde{y} + \sqrt{\tilde{y}^2 - C^2} \right) \right]_{y_0}^{y} \\
&= C \cdot \left(\ln \left(y + \sqrt{y^2 - C^2} \right) - \ln \left(y_0 + \sqrt{y_0^2 - C^2} \right) \right) \\
&= C \cdot \left(\ln \left(\frac{y}{C} + \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1} \right) - \ln \left(\frac{y_0}{C} + \sqrt{\frac{y_0^2}{C^2} - 1} \right) \right) \\
&= C \left(\operatorname{arcosh} \frac{y}{C} - \operatorname{arcosh} \frac{y_0}{C} \right)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung lösen wir nach y auf:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcosh} \frac{y}{C} &= \frac{x}{C} + \operatorname{arcosh} \frac{y_0}{C} \\
y &= C \cdot \cosh \left(\frac{x}{C} + \operatorname{arcosh} \frac{y_0}{C} \right)
\end{aligned}$$

(d) Die gerade gewonnene Lösung setzen wir in y' ein. Da y an der Stelle $x = 0$ ein Minimum hat, also $y'(0) = 0$, lässt sich daraus eine Bedingung an die noch zu bestimmenden Parameter gewinnen.

$$\begin{aligned}
y'(0) &= \sqrt{\cosh^2 \left(\operatorname{arcosh} \frac{y_0}{C} \right) - 1} \\
&= \sqrt{\left(\frac{y_0}{C} \right)^2 - 1} = 0 \\
\Rightarrow v_0 &= C \ .
\end{aligned}$$

Mit $\operatorname{arcosh}(1) = 0$ folgt

$$y = C \cdot \cosh \left(\frac{x}{C} \right)$$

Für den Bereich $x < 0$ gilt aus Symmetriegründen $y(-x) = y(x)$. Da $\cosh(x)$ symmetrisch um $x = 0$ ist, ist diese folglich für alle x gültig.
Die Form entspricht einer Kettenlinie.

(e) Als Bedingung, um C zu bestimmen, benutzen wir den gegebenen Radius R am Endpunkt (die Bedingung für den zweiten Endpunkt führt auf dieselbe Gleichung aufgrund der zuvor verwendeten Symmetrieüberlegung)

$$y(L) = C \cdot \cosh \left(\frac{L}{C} \right) = R \ .$$