Aufgabe 1: Kurzfragen (*2+2+2+4=10 Punkte*)

(a) Was sind Zwangsbedingungen? Nennen Sie zwei verschiedene Arten mit zugehöriger Bedingung.
Welche Beziehung gilt für die Anzahl der Freiheitsgrade f eines Systems aus N Massenpunkten und N_Z Zwangsbedingungen?

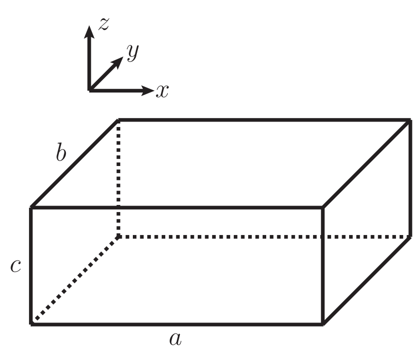
(b) Was versteht man unter einer zyklischen Koordinate?
Zeigen Sie, dass dies direkt auf eine Erhaltungsgröße führt. Wie nennt man diese?

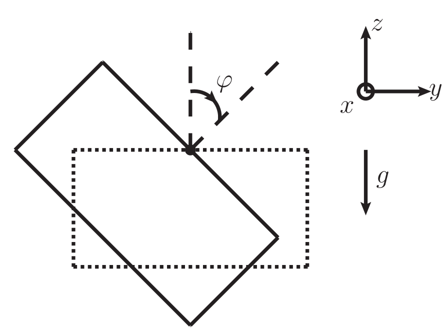
(c) Wie verändern sich die Bewegungsgleichungen, wenn die Lagrange-Funktion L mit einer Konstanten $c \neq 0$ multipliziert wird (mit Rechnung!)?

(d) Drücken Sie den Einheitsvektor in z-Richtung $\vec{e}_z$ in der Basis $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ aus. Dabei spannen die $\vec{e}_i$ das Koordinatensystem auf, das durch eine Drehung um die Eulerwinkel aus dem Koordinatensystem aufgespannt durch $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ hervorgegangen ist. Geben Sie das Ergebnis in expliziter Form als Funktion der Drehwinkel an.

Aufgabe 2: Rotierender Quader (*12+3+10=25 Punkte*)

Betrachten Sie einen homogenen Quader der Masse M, dessen Schwerpunkt im Ursprung liegt und dessen Kanten der Länge a, b, c parallel zur x-, y- bzw. z-Achse ausgerichtet sind.





(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor dieses Quaders bezüglich des Schwerpunkts als Funktion der Masse und der Kantenlängen.

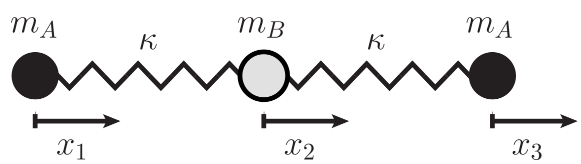
Im folgenden wird der Quader durch eine Befestigung entlang der Geraden $(x, 0, \frac{c}{2})^T$ festgehalten und kann um diese Achse frei rotieren. Außerdem wirke nun die Schwerkraft in negative z-Richtung.

(b) Bestimmen Sie den Trägheitstensor um diese neue Achse.

(c) Stellen Sie eine Lagrangefunktion für die Bewegung des Quaders auf, leiten Sie die Bewegungsgleichungen her und lösen Sie diese. Beschränken Sie sich dabei auf den Fall kleiner Auslenkungen aus der Ruhelage.

Aufgabe 3: Longitudinale Molekülschwingungen (*5+13+21+6+5=50 Punkte*)

Ein Kohlendioxid-Molekül lässt sich näherungsweise als lineares, symmetrisches System von drei Massenpunkten beschreiben. Die beiden äußeren besitzen Masse m_A, der mittlere m_B. Verbunden sind diese mit zwei identischen Federn mit Federkonstante κ und Abstand L in der Ruhelage. Die Auslenkungen aus der Ruhelage x_i sollen klein sein, außerdem sollen nur longitudinale Schwingungen, also entlang der Verbindungslinie der Massenpunkte, betrachtet werden (eindimensionales Problem). Es wirken keine weiteren Kräfte, insbesondere keine Gravitation.



(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion der drei Massenpunkte auf.
[Lösung: $L = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{\kappa}{2}(x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_3x_2 + 2x_2^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2$]

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die zur Transformation

$$x_i^* = x_i + \varepsilon v_0 t \quad , \qquad\qquad t^* = t$$

zugehörige Noetherladung, wobei $v_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante und $\varepsilon > 0$ infinitesimal klein ist.
Was ist die physikalische Bedeutung der Noetherladung?
Finden Sie eine weitere Erhaltungsgröße.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform auf.
Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Systems, indem Sie sie lösen.

(d) Leiten Sie aus den Resultaten eine kurze graphische Darstellung der drei Normalschwingungen ab, zugeordnet zu ihrer jeweiligen Eigenfrequenz.
[Skizzieren Sie Ihre Erwartungen und die dazu führenden Überlegungen, falls Sie die vorherige Teilaufgabe nicht lösen konnten.]

(e) Wie lautet folglich die allgemeine Lösung für die Auslenkungen x_i?
[Verwenden Sie $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{m_A}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{\kappa}{m_A} + 2\frac{\kappa}{m_B}}$ und allgemeine Eigenvektoren $\vec{v}_i$, falls Sie die Werte nicht bestimmen konnten.]

Aufgabe 4: Das Problem der Dido (*6+6+11+6+6=35 Punkte*)

An einem geraden Flussufer soll eine Weide mit einem gegebenen Seil der Länge L so abgegrenzt werden, dass die von Fluss und Seil eingegrenzte Fläche maximal ist.
Für die Rechnung soll der Fluss die x-Achse bilden und das Seil symmetrisch rechts und links des Ursprungs sein sowie im I. und II. Quadranten verlaufen. Der Anfangspunkt des Seils ist also gegeben durch (x_1, y_1) = (-a,0), der Endpunkt durch (x_2, y_2) = (a,0).
Sie dürfen die Überlegung, dass y um $x = 0$ symmetrisch und dort maximal ist im folgenden ohne weitere Begründung verwenden.

(a) Stellen Sie die Bedingungen an das Seil als Gleichungen auf.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und integrieren Sie diese einmal.
Die Integrationskonstante kann einfach mit C bezeichnet werden.
[Ergebnis: $y' = \pm\sqrt{\frac{\lambda^2}{(y-C)^2} - 1}$*]*

(c) Integrieren Sie die Gleichung für y' nochmals.
Betrachten Sie dafür zunächst nur den Bereich $x > 0$.
[Lösung: $y = C + \sqrt{\lambda^2 - (x+b)^2}$ *mit* $b^2 = \lambda^2 - (y(0) - C)^2$*]*

(d) Vereinfachen Sie y mit Hilfe der Bedingung, dass y bei $x = 0$ maximal ist.
Verallgemeinern Sie dann die Lösung für beliebiges x aus Symmetrieüberlegungen.
Welche geometrische Form erkennen Sie?

(e) Stellen Sie Gleichungen auf, mit denen sich die verbleibenden Parameter bestimmen lassen würden und vereinfachen Sie diese soweit möglich. Insbesondere sollen evtl. auftretende Integrale berechnet werden.

Formelsammlung

Integrale:

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

Umformungen:

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \mathrm{arcosh}(x)$$

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \mathrm{arsinh}(x)$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Integrierte Form der Euler-Lagrange-Gleichungen:

Für $F = F(y, y')$ gilt: $$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Für $F = F(x, y')$ gilt: $$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$