Aufgabe 1: Kurzfragen (*4+4+2=10 Punkte*)

(a) Galilei-Transformationen des Ortes $\vec{r}$ und der Zeit t sind definiert durch

$$\vec{r}' = R\vec{r} + \vec{c} + \vec{V}t \,, \qquad\qquad t' = t + a$$

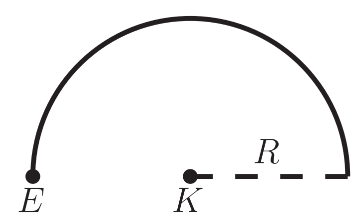
mit einer (eigentlichen) Drehmatrix R, zwei Vektoren $\vec{c}$, $\vec{V}$ und einem Skalar a, welche alle zeitunabhängig sind.
Welche Art von Transformationen beschreiben die einzelnen Terme und welche Erhaltungsgröße gehört dazu?

(b) Häufig hängt die Funktion $F(y, y')$ der Euler-Lagrange-Gleichungen nicht explizit von x ab. Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}\ .$$

(c) Gegeben ist ein zu einem Halbkreis gebogener Stab mit vernachlässigbarer Dicke.
Begründen Sie, warum der folgende Ansatz, um den Trägheitstensor für Drehungen um den Endpunkt E des Stabs zu berechnen, kein richtiges Ergebnis liefert:

- Trägheitstensor um den Kreismittelpunkt K des Halbkreises berechnen,
- verschieben nach E mit Satz von Steiner.



Aufgabe 2: Symmetrietransformationen (*6+14=20 Punkte*)

Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, dargestellt durch eine Masse m, die mit einem festen Aufhängepunkt durch eine Feder der Länge L und Federkonstante κ verbunden ist. Es wirken keine weiteren Kräfte. x bezeichne die Auslenkung der Masse aus der Ruhelage.

(a) Stellen Sie Lagrangefunktion und Bewegungsgleichungen auf. Bestimmem Sie die Schwingungsfrequenz ω und die allgemeine Lösung für $x(t)$.

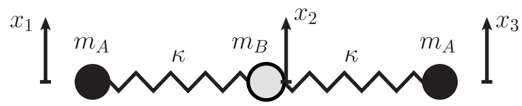
(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die zur Transformation

$$x^* = x + \epsilon\, a \cos(\omega t) \,, \qquad a = \text{const.}$$

gehörige erhaltene Ladung.

Aufgabe 3: Transversale Molekülschwingungen (*2+10+12+6=30 Punkte*)

Ein Kohlendioxid-Molekül lässt sich näherungsweise als lineares, symmetrisches System von drei Massenpunkten beschreiben. Die beiden äußeren besitzen Masse m_A, der mittlere m_B. Verbunden sind diese mit zwei identischen Federn mit Federkonstante κ und Abstand ℓ in der Ruhelage. In dieser Aufgabe betrachten wir nur transversale Schwingungen, die Auslenkungen aus der Ruhelage x_i sollen klein sein. Es wirken keine weiteren Kräfte, insbesondere keine Gravitation.
Für die potentielle Energie gilt der Ansatz $U = \frac{\kappa}{2}\left((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2\right)$.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Problems auf.

Im folgenden betrachten wir nur die Biegeschwingung, bei der die beiden äußeren Massen parallel und entgegengesetzt zur mittleren schwingen.

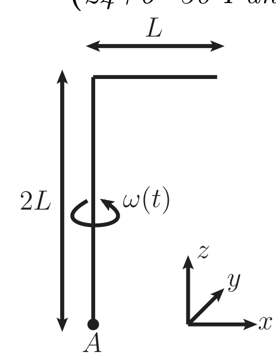
(b) Eliminieren Sie x_2 und x_3, indem Sie nur Bewegungen relativ zum Schwerpunkt des Systems betrachten und die Symmetrie unter Vertauschung von x_1 und x_3 beachten. Wie lautet dann die Lagrangefunktion $L(\delta, \dot{\delta})$, ausgedrückt durch die Winkelvariable $\delta = \frac{(x_1-x_2)+(x_3-x_2)}{\ell}$?

(c) Berechnen Sie die Eigenfrequenz dieser Schwingung. Geben Sie die allgemeine Lösung für die x_i für diese Schwingungsmode an.

(d) Welchem Winkel entspricht δ?

Aufgabe 4: Abgeknickter Stab (*24+6=30 Punkte*)

Ein abgeknickter Stab mit homogener Massendichte besteht aus einem geraden Stück der Länge $2L$ und einem an einem Ende senkrecht dazu wegstehenden Teil der Länge L. Seine Masse beträgt M, die Dicke ist vernachlässigbar klein. Der Stab rotiert mit einer zeitabhängigen Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ um die z-Achse.



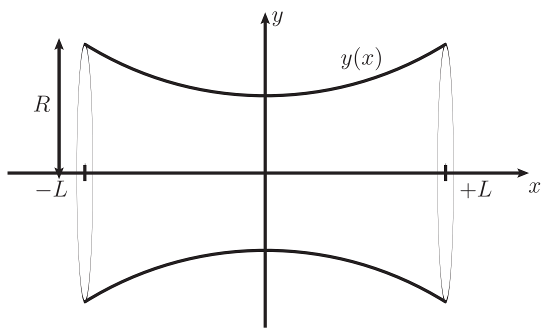
(a) Berechnen Sie den (vollständigen) Trägheitstensor des abgeknickten Stabes im Aufhängepunkt A im körperfesten Koordinatensystem. Betrachten Sie dazu die beiden Teile getrennt.

Falls Sie die Aufgabe nicht lösen können, rechnen Sie im folgenden mit allgemeinen Werten für Θ_{ij} weiter.

(b) Welches Drehmoment M_A übt das Lager im Punkt A auf den Stab aus?

Aufgabe 5: Minimalflächen (*5+7+9+7+2=30 Punkte*)

Zwischen zwei konzentrischen Kreisen mit Radius R wird eine Seifenhaut gespannt. Die Mittelpunkte der Kreise befinden sich auf der x-Achse bei $x = \pm L$ und die Kreise sind senkrecht zu dieser ausgerichtet. Die Seifenhaut ist rotationssymmetrisch um die x-Achse und bestimmt durch die Bedingung, dass ihre Oberfläche minimal ist. Die Oberfläche wird daher durch eine eindimensionale Funktion $y(x)$ beschrieben.
Sie dürfen die Überlegung, dass y um $x = 0$ symmetrisch und dort minimal ist im folgenden ohne weitere Begründung verwenden.



(a) Zeigen Sie, dass die zu minimierende Oberfläche durch

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; y\sqrt{1 + y'^2}$$

gegeben ist.

(b) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf und integrieren Sie diese einmal. Die Integrationskonstante kann einfach mit C bezeichnet werden.
Ergebnis: $y' = \pm\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}$

(c) Integrieren Sie die Gleichung für y' nochmals.
Betrachten Sie dafür zunächst nur den Bereich $x > 0$.
[Lösung: $y = C\cosh(\frac{x}{C} + \operatorname{arcosh}\frac{y(0)}{C})$*]*

(d) Vereinfachen Sie y mit Hilfe der Bedingung, dass y bei $x = 0$ minimal ist.
Verallgemeinern Sie dann die Lösung für beliebiges x aus Symmetrieüberlegungen.
Welche geometrische Form erkennen Sie?

(e) Stellen Sie aus den verbleibenden Bedingungen eine (transzendente) Gleichung auf, aus denen sich C bestimmen lassen würde.

Formelsammlung

Integrale:

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

Umformungen:

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \operatorname{arcosh}(x) \qquad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \operatorname{arsinh}(x) \qquad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) \qquad \sinh(0) = 0$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \qquad \cosh(0) = 1$$

Integrierte Form der Euler-Lagrange-Gleichungen:

Für $F = F(y, y')$ gilt: $$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Für $F = F(x, y')$ gilt: $$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$