

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 1 – Lösung

28. Juli 2014, 17-19 Uhr

Aufgabe 1: Kurzfragen

(2+2+2+2=8 Punkte)

- (a) Verallgemeinerte Koordinaten sind Koordinaten, die die Zwangsbedingungen des Systems automatisch berücksichtigen. Die Anzahl der verallgemeinerten Koordinaten ist gleich der Anzahl der Freiheitsgrade f des Systems: $f = 3N - N_Z$ mit N Massenpunkten und N_Z Zwangsbedingungen.
- (b) Das Noethertheorem besagt, dass es zu jeder infinitesimalen Transformation, die die Lagrange-Gleichung invariant lässt, eine zugehörige Erhaltungsgröße gibt.
- (c)
- Impulserhaltung (3): $m\dot{\vec{r}}$
 - Drehimpulserhaltung (3): $m\dot{\vec{r}} \times \vec{r}$
 - Energieerhaltung (1): $\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$
 - Schwerpunktsbewegung (3): $\vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot t + \vec{r}_0$
- (Die Angabe der Begriffe ist ausreichend.)
- (d) Der Satz von Steiner beschreibt die Berechnung des Trägheitstensor Θ' um einen beliebigen Punkt P ausgehend vom Trägheitstensor Θ um den Schwerpunkt S :

$$\Theta' = \Theta + M (\vec{a}^2 \mathbb{1} - \vec{a} \vec{a}^T) \quad \text{mit } \vec{a} = \overrightarrow{SP}.$$

Aufgabe 2: Massen und Feder

(12+4+5+8+5+8=42 Punkte)

- (a) Die kinetische Energie des Systems ist

$$T_1 = \frac{m}{2} \dot{z}_1^2$$

$$T_2 = \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{m}{2} (3\dot{z}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{m}{2} 4\dot{z}_2^2$$

mit

$$\frac{z_2}{x_2} = \tan(-30^\circ) = \frac{\sin(-30^\circ)}{\cos(-30^\circ)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{3}z_2.$$

Für die potentielle Energie benötigen wir den Abstand der beiden Massenpunkte

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 3z_2^2 + (z_2 - z_1)^2 = 4z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2,$$

wodurch sich für die Federenergie

$$U_F = \frac{\kappa}{2} l^2 = \frac{\kappa}{2} (4z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2)$$

ergibt. Der zweite Teil der potentiellen Energie gibt sich aus der Schwerkraft

$$U_g = mgz_1 + mgz_2.$$

Die Lagrangefunktion ist damit

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{z}_1^2 + 4\dot{z}_2^2) - \frac{\kappa}{2} (4z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2) - mg(z_1 + z_2).$$

(b) Für z_1 ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} - \frac{\partial L}{\partial z_1} &= m\ddot{z}_1 + \frac{\kappa}{2}(2z_1 - 2z_2) + mg = 0 \\ \Rightarrow \ddot{z}_1 &= -\frac{\kappa}{m}(z_1 - z_2) - g \end{aligned}$$

und für z_2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} - \frac{\partial L}{\partial z_2} &= 4m\ddot{z}_2 + \frac{\kappa}{2}(-2z_1 + 8z_2) + mg = 0 \\ \Rightarrow 4\ddot{z}_2 &= -\frac{\kappa}{m}(4z_2 - z_1) - g. \end{aligned}$$

(c) In der Gleichgewichtslage gilt $\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = 0$. Mit den Bewegungsgleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{m}(z_1 - z_2) - g &= -\frac{\kappa}{m}(4z_2 - z_1) - g \\ 2z_1 &= 5z_2 \\ z_1 &= \frac{5}{2}z_2. \end{aligned}$$

Eingesetzt in $\ddot{z}_1 = 0$ finden wir

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= -\frac{\kappa}{m} \left(\frac{5}{2}z_2 - z_2 \right) - g = 0 \\ \frac{3}{2}z_2 &= -\frac{mg}{\kappa}. \end{aligned}$$

Damit haben wir für die Gleichgewichtslage

$$z_{2,0} = -\frac{2}{3} \frac{mg}{\kappa} \quad \text{und} \quad z_{1,0} = -\frac{5}{3} \frac{mg}{\kappa}.$$

- (d) Wir führen nun die Auslenkung aus der Ruhelage ein, $\xi_i = z_i - z_{i,0} \Rightarrow z_i = \xi_i + z_{i,0}$
 $\Rightarrow \dot{\xi}_i = \dot{z}_i$, und setzen dies in die Lagrangefunktion ein:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2) - \frac{\kappa}{2} ((\xi_1 + z_{1,0})^2 - 2(\xi_1 + z_{1,0})(\xi_2 + z_{2,0}) + 4(\xi_2 + z_{2,0})^2) \\ - mg (\xi_1 + \xi_2 + z_{1,0} + z_{2,0}) .$$

Die Terme unabhängig von ξ tragen nichts zu den Bewegungsgleichungen bei und können deshalb weggelassen werden,

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2) - \frac{\kappa}{2} (\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2) \\ - \frac{\kappa}{2} \left(2\xi_1 \left(-\frac{5}{3} \frac{mg}{\kappa} \right) - 2\xi_1 \left(-\frac{2}{3} \frac{mg}{\kappa} \right) - 2\xi_2 \left(-\frac{5}{3} \frac{mg}{\kappa} \right) + 8\xi_2 \left(-\frac{2}{3} \frac{mg}{\kappa} \right) \right) \\ - mg (\xi_1 + \xi_2) \\ = \frac{m}{2} (\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2) - \frac{\kappa}{2} (\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2) \\ + \frac{mg}{2 \cdot 3} (\xi_1(10 - 4 - 6) + \xi_2(-10 + 16 - 6)) \\ = \frac{m}{2} (\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2) - \frac{\kappa}{2} (\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2) .$$

- (e) Die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen aus der Ruhelage sind

$$m\ddot{\xi}_1 + \kappa(\xi_1 - \xi_2) = 0 \\ 4m\ddot{\xi}_2 + \kappa(-\xi_1 + 4\xi_2) = 0$$

und damit in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{pmatrix} = -\underbrace{\frac{\kappa}{m} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} .$$

Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix M ,

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}) = (1 - \lambda)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} ,$$

und damit sind die Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{m}$ und $\omega_2^2 = \frac{3}{2} \frac{\kappa}{m}$.

- (f) Wir berechnen den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} v_{11} = v_{12} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

und zum Eigenwert $\lambda_1 = \frac{3}{2}$,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}v_{21} = v_{22} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(Die Eigenvektoren stehen hier nicht senkrecht aufeinander, wie man direkt sieht. Diese Eigenschaft gilt im allgemeinen nur für symmetrische Matrizen, was M nicht ist.)

Die allgemeine Lösung mit dem Schwingungsansatz ist

$$\xi_i = A \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{2m}} \\ \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{3\kappa}{2m}}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2m}}t + \varphi_1\right) + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{3\kappa}{2m}}t + \varphi_2\right) .$$

(Die Eigenvektoren müssen hier nicht notwendigerweise normiert werden. Auftretende Normierungsfaktoren können in A_i absorbiert werden.)

Die Auslenkung der Masse 1 aus der Ruhelage in z -Richtung ist stets doppelt so groß wie die Auslenkung der Masse 2.

Für ω_1 schwingen die Massen gleichphasig:



Für ω_2 schwingen die Massen gegenphasig:



Aufgabe 3: Noether-Theorem

(2+11+7=20 Punkte)

- (a) Die Bedingung für zyklische Koordinaten ist, dass die Lagrangefunktion L nicht von einer verallgemeinerten Koordinate abhängt. Hier ist das nicht der Fall, da L von x , y und z abhängt.
- (b) Die Lagrangefunktion ist

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U_0 \left(x \sin\left(\frac{2\pi z}{R}\right) + y \cos\left(\frac{2\pi z}{R}\right) \right) .$$

Mit den Transformationen

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x^* = x + y \sin \epsilon \\y &\rightarrow y^* = y - x \sin \epsilon \\z &\rightarrow z^* = z + \frac{R}{2\pi} \epsilon \\t &\rightarrow t^* = t \quad \Rightarrow \varphi = 0, \quad \frac{dt^*}{dt} = 1\end{aligned}$$

ergibt sich die transformierte Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}L^* &= \frac{m}{2} ((\dot{x} + \dot{y} \sin \epsilon)^2 + (\dot{y} - \dot{x} \sin \epsilon)^2 + \dot{z}^2) \\&\quad - U_0 \left((x + y \sin \epsilon) \sin \left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon \right) + (y - x \sin \epsilon) \cos \left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon \right) \right) .\end{aligned}$$

Die Bedingung für das (nicht erweiterte) Noether-Theorem,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon} \left(L^* \frac{dt^*}{dt} \right)_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon} (L^*)_{\epsilon=0} \\&= \left[m ((\dot{x} + \dot{y} \sin \epsilon) \dot{y} \cos \epsilon + (\dot{y} - \dot{x} \sin \epsilon) (-\dot{x} \cos \epsilon)) \right. \\&\quad - U_0 \left(y \cos \epsilon \sin \left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon \right) + (x + y \sin \epsilon) \cos \left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon \right) \right. \\&\quad \left. \left. - x \cos \epsilon \cos \left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon \right) - (y - x \sin \epsilon) \sin \left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon \right) \right) \right]_{\epsilon=0} \\&= m (\dot{x} \dot{y} - \dot{y} \dot{x}) - U_0 \left(y \sin \left(\frac{2\pi z}{R} \right) + x \cos \left(\frac{2\pi z}{R} \right) \right. \\&\quad \left. - x \cos \left(\frac{2\pi z}{R} \right) - y \sin \left(\frac{2\pi z}{R} \right) \right) \\&= 0 ,\end{aligned}$$

ist erfüllt.

(c) Wir nähern jetzt die Transformationen für kleine ϵ ,

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x^* = x + y \sin \epsilon \approx x + y\epsilon & \Rightarrow \psi_x = y \\y &\rightarrow y^* = y - x \sin \epsilon \approx y - x\epsilon & \Rightarrow \psi_y = -x \\z &\rightarrow z^* = z + \frac{R}{2\pi} \epsilon & \Rightarrow \psi_z = \frac{R}{2\pi} ,\end{aligned}$$

und berechnen damit die Erhaltungsgröße des Noether-Theorems

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \psi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \psi_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \psi_z = m \dot{x} y + m \dot{y} (-x) + m \dot{z} \frac{R}{2\pi} \\&= m \left(\dot{x} y - x \dot{y} + \dot{z} \frac{R}{2\pi} \right) .\end{aligned}$$

Eine weitere Erhaltungsgröße ist die Energie, da die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Aufgabe 4: Geodäte auf dem Zylinder

(7+7+6=20 Punkte)

Startpunkt $S(\varphi_S, z_S)$ und Endpunkt $E(\varphi_E, z_E)$.

(a) Für die Verbindungslinie zwischen Start- und Endpunkt gilt:

$$L = \int_S^E ds = \min .$$

Mit Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi & \Rightarrow dx &= -R \sin \varphi d\varphi \\ y &= R \sin \varphi & \Rightarrow dy &= R \cos \varphi d\varphi \\ z &= z & \Rightarrow dz &= dz \end{aligned}$$

ergibt sich für das Wegelement

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (d\varphi)^2 + R^2 \cos^2 \varphi (d\varphi)^2 + (dz)^2} \\ &= \sqrt{R^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2} \end{aligned}$$

und damit als Bedingung an die Verbindungslinie zwischen Start- und Endpunkt

$$L = \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} d\varphi \sqrt{R^2 + z'^2} .$$

(b) Wir betrachten also die folgende Funktion

$$F(z, z', \varphi) = \sqrt{R^2 + z'^2} ,$$

die nicht von φ abhängt, $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$, und damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z'} &= \text{const.} \\ \frac{2z'}{2\sqrt{R^2 + z'^2}} &= A \\ z'^2 &= A^2(R^2 + z'^2) \\ z'^2(1 - A^2) &= A^2 R^2 \\ z' &= \pm \sqrt{\frac{A^2 R^2}{1 - A^2}} . \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Zeile ist konstant und damit können wir schreiben

$$z' = C .$$

Nochmaliges Integrieren liefert

$$z = C\varphi + \varphi_0 .$$

(c) Für die Verbindungslinie zwischen Start- und Endpunkt gilt damit

$$L = \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} d\varphi \sqrt{R^2 + z'^2} = \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} d\varphi \sqrt{R^2 + C^2} = \sqrt{R^2 + C^2}(\varphi_E - \varphi_S) .$$

Jetzt bestimmen wir noch die Konstante C mit dem Start- und Endpunkt

$$\begin{aligned} z_E &= C\varphi_E + \varphi_0 \\ z_S &= C\varphi_S + \varphi_0 \\ z_E - z_S &= C(\varphi_E - \varphi_S) \\ C &= \frac{z_E - z_S}{\varphi_E - \varphi_S} , \end{aligned}$$

womit sich für die Verbindungslinie

$$L = \sqrt{R^2 + \left(\frac{z_E - z_S}{\varphi_E - \varphi_S} \right)^2} (\varphi_E - \varphi_S) = \sqrt{R^2(\varphi_E - \varphi_S)^2 + (z_E - z_S)^2}$$

ergibt.

Aufgabe 5: Zweilagiger Zylinder

(10 Punkte)

Zur Bestimmung der Masse bestimmen wir zunächst die Volumina des Innen- und Außenzylinders,

$$\begin{aligned} V_i &= r^2 \pi h \\ V_a &= R^2 \pi h - r^2 \pi h = (R^2 - r^2) \pi h . \end{aligned}$$

Damit ist die Masse

$$m = \rho_i V_i + \rho_a V_a = \rho_i V_i + 2\rho_i V_a = \rho_i (r^2 + 2(R^2 - r^2)) \pi h ,$$

beziehungsweise die Dichte

$$\rho_i = \frac{m}{(2R^2 - r^2) \pi h} ,$$

Zur Bestimmung der Rotationsenergie benötigen wir das Element des Trägheitstensors um

die z -Achse

$$\begin{aligned}
 \Theta_{zz} &= \int_0^R d\tilde{r} \int_0^{2\pi} \tilde{r} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz \underbrace{\varrho}_{=\tilde{r}^2} \left(\underbrace{x^2 + y^2}_{=\tilde{r}^2} \right) \\
 &= h \cdot 2\pi \cdot \left(\int_0^r d\tilde{r} \rho_i \tilde{r}^3 + \int_r^R d\tilde{r} \underbrace{\rho_a}_{=2\rho_i} \tilde{r}^3 \right) \\
 &= h \cdot 2\pi \cdot \rho_i \cdot \left(\left[\frac{1}{4} \tilde{r}^4 \right]_0^r + 2 \left[\frac{1}{4} \tilde{r}^4 \right]_r^R \right) \\
 &= \frac{2m}{2R^2 - r^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2R^4 - r^4) \\
 &= \frac{m}{2} \cdot \frac{2R^4 - r^4}{2R^2 - r^2} .
 \end{aligned}$$

Die Rotationsenergie ist damit

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta_{zz} \omega^2 = \frac{m}{4} \cdot \frac{2R^4 - r^4}{2R^2 - r^2} \cdot \omega^2 .$$