# Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

## Übungsblatt 11

Abgabe: Fr, 26.06.15
Besprechung: Di, 30.06.15

**Aufgabe 26: Galilei-Transformationen** (*3+2+2=7 Punkte*)

Wir betrachten nochmals die Galilei-Transformationen aus Aufgabe 18.

(a) Schreiben Sie die Transformation $g = (R, \vec{c}, \vec{V}, a)$ um in eine infinitesimale Version mit den infinitesimalen Parametern $\vec{\omega}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ und $\alpha$. Quadrate solcher Parameter werden gegenüber den Parametern selbst vernachlässigt.
*Zwischenschritte für R:* Welche Bedingung erhält man aus $R^T R = \mathbb{1}$ und $\det R = +1$ mit $R_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij}$ für die Matrix $\omega$? Wie definiert man daraus die Komponenten von $\vec{\omega}$?

(b) Betrachten Sie die Lagrange-Funktion eines freien Teilchens $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$. Prüfen Sie, für welche infinitesimalen Transformationen der Ausdruck $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left\{ L\left(x^*, \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}, t^*\right) \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} \right\}\Big|_{\epsilon=0}$ verschwindet und für welche er eine totale Zeitableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x,t)$ wird. Wie sieht in diesem Fall $f(x,t)$ aus? *(Denken Sie sich für diese Rechnung die infinitesimalen Parameter von (a) als $\epsilon$ multipliziert mit den ursprünglichen, also $\omega = \epsilon(R - \mathbb{1})$, $\vec{\gamma} = \epsilon \vec{c}$, etc.)*

(c) Verwenden Sie das Noether-Thorem, um die Erhaltungsgröße $Q = Q(\vec{\omega}, \vec{\gamma}, \vec{v}, \alpha)$, die zu den infinitesimalen Galilei-Transformationen gehört, zu bestimmen. Trennen Sie die infinitesimalen Transformationsparameter ab und definieren Sie den Rest als die Noether-Ladungen, die Konstanten der Bewegung sind. Welche Bedeutung haben diese 10 Erhaltungsgrößen?

**Aufgabe 27: Laplace-Runge-Lenz-Vektor** (*5+2=7 Punkte*)

Nur in seltenen Fällen gelingt es, neben den zehn Erhaltungsgrößen der Galilei-Transformationen (s. Aufgabe 24) eine weitere elfte, unabhängige Erhaltungsgröße zu finden. Ein Beispiel hierfür ist das $\frac{1}{r}$-Zentralpotential mit der Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r}$

mit $r = |\vec{r}|$. Wir definieren drei infinitesimale Transformationen mit zeitlich konstanten Parametern $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$

$$\delta\vec{r} := \vec{r}^* - \vec{r} = 2(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\dot{\vec{r}} - \vec{\beta}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{r}})\vec{r}\ .$$

Die Zeit $t$ wird nicht transformiert.

(a) Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für $L$ auf.
Im folgenden wollen wir $\delta L := L(\vec{r}^*, \dot{\vec{r}}^*) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ berechnen: Überzeugen Sie sich davon, dass für die $\delta$-Operation die Produktregel gilt, d.h. $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$. Zeigen Sie, dass hier auch gilt: $\delta\dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\vec{r}$. Finden Sie damit das Resultat

$$\delta L = \frac{2\alpha}{r}\left(-\frac{1}{r^2}(\vec{\beta}\ \cdot\vec{r})(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}) + \vec{\beta}\cdot\dot{\vec{r}}\right)\ .$$

Dieses Ergebnis kann als Zeitableitung $\delta L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\vec{\beta}, \vec{r})$ geschrieben werden. Geben Sie $f(\vec{\beta}, \vec{r})$ an.

(b) Wenden Sie das (erweiterte) Noether-Theorem an, um eine Erhaltungsgröße $\vec{A}$ (die $2\vec{\beta}$ multipliziert) zu bekommen, den Laplace-Runge-Lenz-Vektor.

## Aufgabe 28: Euler-Winkel (*2+2+2=6 Punkte*)

Eine allgemeine Drehung im dreidimensionalen Raum lässt sich über die sogenannten Euler-Winkel parametrisieren. Dabei wird aus dem kartesischen Rechtskoordinatensystem $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ein neues kartesisches Rechtskoordinatensystem $\{\vec{e}_x{}''', \vec{e}_y{}''', \vec{e}_x{}'''\}$ mit Hilfe einer Drehmatrix $D$. Diese lässt sich zerlegen in die Hintereinanderausführung dreier Drehungen:

1. Winkel $\varphi$ um die $\vec{e}_z$-Achse $\to \vec{e}_i{}'$
2. Winkel $\vartheta$ um die (neue) $\vec{e}_x{}'$-Achse $\to \vec{e}_i{}''$
3. Winkel $\psi$ um die (neue) $\vec{e}_z{}''$-Achse $\to \vec{e}_i{}'''$

*(In der Literatur finden sich neben dieser $(z, x', z'')$-Konvention auch andere mit $(z, y', z'')$ oder $(z, y', x'')$ sowie anderen Bezeichnungen der Winkel.)*

(a) Schreiben Sie die Matrix $D(\varphi, \vartheta, \psi)$ als Matrixprodukt dreier Drehmatrizen, sodass gilt $\vec{e}_i{}''' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\vec{e}_j$. Wie erhält man die Komponenten $x_i{}'''$ eines Vektors $\vec{r}$ bezüglich des 3-gestrichenen Koordinatensystems aus denen des ungestrichenen (Rechnung ohne explizites Ausmultiplizieren von $D$)?

(b) Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ lassen sich aus der Drehmatrix $D$ mit Hilfe der Formel $\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}(\dot{D}D^T)_{lm}$ gewinnen. Zeigen Sie, dass bei einem Produkt von zwei Drehmatrizen $D = D_2 D_1$ für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 + D_2\vec{\omega}_1$ gilt, wenn $\vec{\omega}_i$ zur Drehung $D_i$, $i = 1, 2$ gehört. Nutzen Sie dafür die Identität $\varepsilon_{klm}D_{lp}D_{mq} = \varepsilon_{jpq}D_{kj}$.

(c) Berechnen Sie damit $\vec{\omega}(\varphi, \vartheta, \psi)$ für die Drehung $D(\varphi, \vartheta, \psi)$. Wie sieht nach der Gleichung aus der vorherigen Teilausgabe $\vec{\omega}_\varphi$ aus? Folgern Sie daraus $\vec{\omega}_\vartheta$ und $\vec{\omega}_\psi$.