Klassische Theoretische Physik II

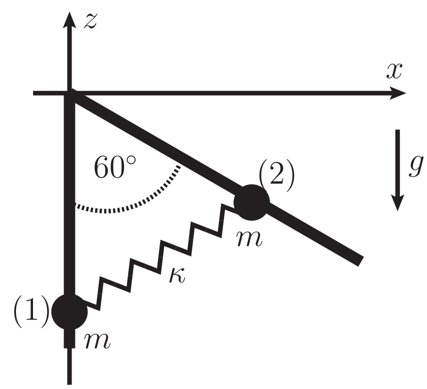
V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 6

Abgabe: Fr, 22.05.15
Besprechung: Di, 26.05.15

Aufgabe 11: Massen und Feder (*4+1,5+1,5+2+2+3=14 Punkte*)

Zwei punktförmige Körper gleicher Masse m bewegen sich im homogenen Schwerefeld g der Erde reibungsfrei auf zwei Drähten, von denen Massenpunkt 1 vertikal verläuft und Massenpunkt 2 um $60°$ gegen die Vertikale geneigt ist (s. Skizze). Eine ideale Feder mit Federkonstante κ verbindet die beiden Massen. Im entspannten Zustand habe die Feder die Länge $L = 0$. Es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems in den vertikalen Auslenkungen z_1, z_2 der beiden Massen auf.

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.

(c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage $z_{i,0}$, in der auf beide Massenpunkte keine Kraft wirkt.

(d) Zur Vereinfachung der Bewegungsgleichungen ist es sinnvoll, Koordinaten $\xi_i = z_i - z_{i,0}$ zu wählen, die die Auslenkung der Massen aus ihren Ruhelagen beschreiben. Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten

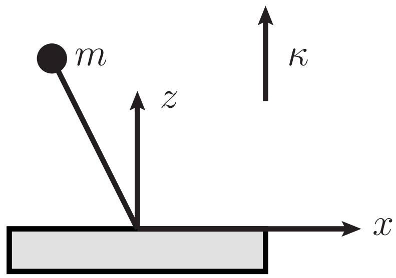
$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2\right) - \frac{\kappa}{2}\left(\xi_1^2 + 4\xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2\right) + \text{const.}$$

ist.

(e) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems, indem Sie die Bewegungsgleichungen, die aus (d) folgen, in Matrixform bringen.

(f) Wie lautet folglich die allgemeine Lösung für die Auslenkungen ξ_i? Interpretieren Sie die auftretenden Schwingungsmoden.

Aufgabe 12: Steh-auf-Männchen (*2+2=4 Punkte*)



Ein Steh-auf-Männchen lässt sich genähert beschreiben als eine punktförmige Masse m, die mit einem festen Stab der Länge l mit dem Aufsetzpunkt am Boden verbunden ist (s. Skizze). Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass die Bewegung außerdem nur in einer Ebene, der x-z-Ebene, stattfinden kann. Die Rückstellkraft, die das Männchen wieder aufrichtet, ist gegeben durch eine konstante Kraft κ in positive z-Richtung, die Schwerkraft sei dieser gegenüber klein. Wir betrachten nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage; nähern Sie gegebenenfalls passend.

(a) Finden Sie eine verallgemeinerte Koordinate, um das System zu beschreiben. Drücken Sie die kartesischen Koordinaten x, y und z durch diese aus. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf. Leiten Sie daraus die Lagrange-Gleichungen 2. Art her.

(b) Machen Sie einen geeigneten Ansatz, der die Lagrange-Gleichungen löst, und finden Sie davon ausgehend die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen. Wie viele Anfangsbedingungen benötigen Sie, um die Bewegung vollständig beschreiben zu können? Geben Sie ein Beispiel für mögliche Anfangsbedingungen.

Aufgabe 13: Zyklische Koordinaten (*2 Punkte*)

Gegeben ist die Lagrangefunktion

$$L(r,\vartheta,\varphi,\dot{r},\dot{\vartheta},\dot{\varphi},t) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - V(r)\,.$$

Welche Variablen sind zyklisch? Was sind die zugehörigen kanonischen Impulse?