Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 7

Abgabe: Fr, 29.05.15
Besprechung: Di, 03.06.15

Aufgabe 14: Teilchen im Magnetfeld (*0.5+3.5+3+1=8 Punkte*)

Auf ein elektrisch geladenes Teilchen mit Masse m und Ladung $Q = qe$ (Elementarladung $e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} As$) wirkt die Lorentzkraft

$$\vec{F} = Q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \; .$$

(a) Wieso lässt sich $\vec{F}$ nicht als Gradient eines Potentials $V(\vec{r}, t)$ ausdrücken?

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass das Potential gegeben ist durch

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &= Q \; \Phi(\vec{r}, t) - Q \; \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \\ \text{mit } \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \; . \end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie eine zeitunabhängige, homogene magnetische Induktion der Form $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $\Phi = 0$. Wie sieht in kartesischen Koordinaten das Potential aus, das dieses $\vec{B}$-Feld ergibt?
Schreiben Sie dieses in Zylinderkoordinaten um mit Einheitsvektoren $\vec{e}_\varrho$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$, also geben Sie A_ϱ, A_φ und A_z als Funktion von ϱ, φ und z an.
Schreiben Sie damit die Lagrange-Funktion in Zylinderkoordinaten.
Zwischenergebnis: $\vec{A} = \frac{1}{2} B \varrho \vec{e}_\varphi$.

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Welche Variablen sind zyklisch und welche Größen sind folglich erhalten?

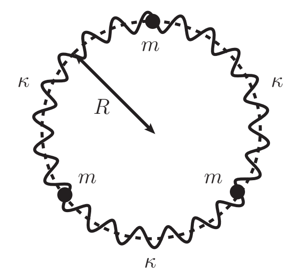
(d) Finden Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen für konstantes ϱ.

Aufgabe 15: Wirbelstrombremse (*2 Punkte*)

Ein ICE der Masse m fährt auf ebener Strecke in den Bahnhof ein. Am Bahnsteiganfang ($t = 0, x = 0, \dot{x} = v_0$) beginnt der Lokführer, mit der Wirbelstrombremse zu bremsen. Diese beruht auf magnetischer Induktion und erzeugt deshalb eine geschwindigkeitsabhängige Kraft $F = -\gamma \dot{x}$ auf den Zug. Reibungskräfte sind dieser gegenüber zu vernachlässigen. Benutzen Sie den Lagrange-Formalismus, um den Ort des Zugs als Funktion der Zeit t zu berechnen. Wo und wann kommt der Zug zum Stehen?

Aufgabe 16: Ring-Oszillator (*3+1+4+2=10 Punkte*)

Drei Massenpunkte m bewegen sich reibungsfrei auf einem Kreisring vom Radius R. Sie sind durch drei identische, ideale Federn mit Federkonstante κ entlang der Kreisbögen miteinander verbunden, die in Ruhelage entspannt sind. Es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den Koordinaten φ_i ($i = 1, 2, 3$) auf, die als Auslenkung aus einer durch gleiche Federspannung bestimmten Lage definiert sind. *[*$L = \frac{m}{2} R^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) - \kappa R^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_3 - \varphi_3\varphi_1)$*]*

(b) Welche Erhaltungsgrößen erkennen Sie direkt aus der Form der Lagrangefunktion? Gibt es zyklische Koordinaten?

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform auf. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Systems, indem Sie sie lösen.

(d) Wie lautet die allgemeine Lösung für die φ_i? Überlegen Sie sich zunächst, was Eigenfrequenz $\omega = 0$ für die Lösung bedeutet.
Falls Sie die vorherige Teilaufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie für die Eigenfrequenzen $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 4$, $\omega_3 = 6$ *(dies sind nicht die richtigen Lösungen) und allgemeine Ausdrücke* $\vec{v}_i$ *für die zugehörigen Eigenvektoren.*