KIT **SS 2015**

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 8

Abgabe: Fr, 05.06.15
Besprechung: Di, 09.06.15

Aufgabe 17: Integration der Euler-Lagrange-Gleichungen (*2+1=3 Punkte*)

(a) Häufig hängt der Integrand $F(y, y')$ nicht explizit von x ab. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$ gilt.

(b) Hängt der Integrand $F(x, y')$ hingegen nicht von y ab, gilt $\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$.

Aufgabe 18: Galilei-Gruppe (*5+1=6 Punkte*)

Betrachten Sie die folgenden Galilei-Transformationen des Ortes $\vec{r}$ und der Zeit t mit einer (eigentlichen) Drehmatrix R, zwei Vektoren $\vec{c}$, $\vec{V}$ und einem Skalar a, alle zeitunabhängig:

$$\vec{r}' = R\vec{r} + \vec{c} + \vec{V}t \ , \qquad\qquad t' = t + a \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Transformationen bezüglich Hintereinanderausführung eine (nicht-abelsche) Gruppe bilden.
Bestimmen Sie dazu zunächst das Verknüpfungsgesetz, d.h. geben Sie $g_3 = (R_3, \vec{c}_3, \vec{V}_3, a_3)$ als Funktion der $g_{1,2}$ an, wenn erst eine Transformation mit Parametersatz g_1, dann mit g_2 ausgeführt wird ($g_3 = g_2 \circ g_1$). Wieso ist diese Verknüpfung nicht-abelsch?
Welche Parameter hat das Einselement e?
Welche Parameter gehören zu g^{-1}, dem inversen Element?
Wieso wird diese Verknüpfung das Assoziativgesetz erfüllen (ohne Rechnung)?

(b) Zeigen Sie: Wenn sich ein freier Massenpunkt m in einem Koordinatensystem S geradlinig, gleichförmig bewegt, d.h. $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$ gilt, dann bewegt er sich auch in einem Koordinatensystem S', welches sich aus S durch eine Galilei-Transformationen ergibt, geradlinig, gleichförmig, d.h. es gilt $\vec{r}\,' = \vec{v}_0\,' t' + \vec{r}_0\,'$. Wie drücken sich die gestrichenen Größen durch die ungestrichenen aus? Also geht ein Inertialsystem unter allgemeinen Galilei-Transformationen in ein Inertialsystem über.

Aufgabe 19: Geodäte auf Ellipsoid (*2,5+2+0,5+4=9 Punkte*)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Erde, idealisiert angenähert als ein Rotationsellipsoid mit Halbachsen a und b. Dessen Oberfläche ist gegeben durch die Beziehung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

Ein Punkt auf der Oberfläche soll durch die in der Geografie übliche Form von Längen- und Breitengrad angegeben werden. Gegenüber der Analogie zu sonst üblichen Kugelkoordinaten ändert sich der Wertebereich von ϑ zu $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, und die Beziehung zu kartesischen Koordinaten lautet

$$\begin{aligned} x &= a\cos\vartheta\cos\varphi \\ y &= a\cos\vartheta\sin\varphi \\ z &= b\sin\vartheta \end{aligned}$$

mit den beiden Parametern ϑ und φ sowie festen Halbachsen a und b.
Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei beliebigen Punkten auf dem Ellipsoid, eine sogenannte Geodäte.

(a) Berechnen Sie die infinitesimalen Elemente $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ mittels $\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta+\frac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi$, etc.
Zeigen Sie dann, dass sich das Wegelement $\mathrm{d}s$ für das Ellipsoid schreiben lässt als $\mathrm{d}s=\sqrt{(a^2\sin^2\vartheta+b^2\cos^2\vartheta)(\mathrm{d}\vartheta)^2+a^2\cos^2\vartheta(\mathrm{d}\varphi)^2}$, und stellen Sie die Gleichung für die Länge L zwischen Startpunkt $S(\vartheta_S,\varphi_S)$ und Endpunkt $E(\vartheta_E,\varphi_E)$ auf.

(b) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die dazugehörige Funktion $F(\varphi,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vartheta},\vartheta)$ auf. Integrieren Sie diese einmal, die dabei auftretende Integrationskonstante kann als $\pm a\cos\psi$ mit einem ψ zwischen 0 und $\pi/2$ gewählt werden. Lösen Sie die Gleichung nach φ' auf.
Lösung: $\varphi'=\pm\frac{\cos\psi}{\cos\vartheta}\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta+(b/a)^2\cos^2\vartheta}{\sin^2\psi-\sin^2\vartheta}}$

(c) Bestimmen Sie daraus eine Integralgleichung für φ der Form $\varphi-\varphi_S=\int\mathrm{d}\vartheta f(\vartheta)$. *(Das auf der rechten Seite auftretende Integral ist nicht mit analytischen Methoden lösbar.)*

(d) Wir betrachten jetzt den Spezialfall einer Kugel: $b=a=:r$. Um das Integral zu lösen führen wir eine neue Integrationsvariable t ein, die mit ϑ über die Relation $\vartheta=\arcsin(\sin\psi\sin t)$ zusammenhängt. Bestimmen Sie daraus $\varphi(t)$, sodass wir die Bahnkurve in parametrischer Form als Funktion von t (und der Integrationskonstanten ψ) erhalten.
Wie können Sie schließlich ψ bestimmen (ohne Rechnung!)?
Hinweis: Die Fallunterscheidung der beiden Vorzeichen in φ' soll hier nicht weiter verfolgt werden, und Sie dürfen ohne weitere Begründung den "+"-Fall verwenden.