Klassische Theoretische Physik II

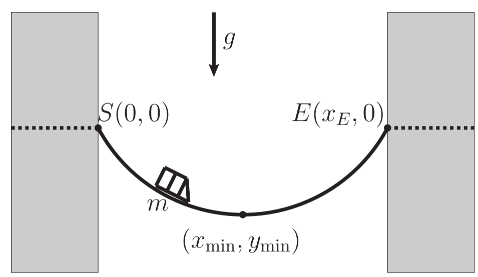
V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 9

Abgabe: Fr, 12.06.15
Besprechung: Di, 16.06.15

Aufgabe 20: Kombilösung (*3+5+2=10 Punkte*)

Unter der Kaiserstraße wird ein Tunnel für die Straßenbahn gegraben. Dabei ist die einfachste Möglichkeit, eine horizontale Verbindung zwischen zwei Haltestellen, nicht die idealste. Durch eine leicht nach unten gekrümmte Bahn lässt sich die Gravitation hilfreich ausnutzen. Bei der Ausfahrt aus der Haltestelle wirkt eine zusätzliche Beschleunigung auf die Bahn, während bei der Einfahrt in die nächste Haltestelle die nach oben ansteigende Strecke zusätzlich bremst.



Um die Rechnung nicht zu kompliziert werden zu lassen, verwenden wir einige Vereinfachungen: Die Straßenbahn wird punktförmig mit Masse m angenommen, außerdem vernachlässigen wir den Bereich direkt an der Haltestelle mit Beschleunigung und Verzögerung sowie sämtliche Reibungseffekte. Die Straßenbahn soll also zwischen Startpunkt S $(x_S, y_S) = (0,0)$ und Endpunkt E $(x_E, y_E) = (x_E, 0)$ nur durch Gravitation beschleunigt werden, und die Strecke kann an den beiden Endpunkten eine nicht-verschwindende Steigung besitzen (s. Skizze). Gesucht ist diejenige Bahnkurve, die bei gegebener Startgeschwindigkeit v_0 die schnellste Verbindung zwischen den beiden Punkten liefert.

(a) Stellen Sie die Bedingung an die Bahnkurve als Gleichung auf. Finden Sie die integrierte Form der Bewegungsgleichungen und lösen Sie diese nach y' auf. Die Integrationskonstante kann einfach mit c bezeichnet werden, diese bestimmen wir später.
Ergebnis: $y' = \pm\sqrt{\frac{1}{c^2(v_0^2-2gy)} - 1}$

(b) Integrieren Sie die Gleichung für y' nochmals. Betrachten Sie dabei zunächst nur den Bereich links vom Punkt $(x_{\min}, y_{\min})$, also $0 \le x \le x_{\min}$. Das auftretende Integral $\int \mathrm{d}\tilde{y}\sqrt{\frac{\tilde{y}}{1-\tilde{y}}}$ kann durch Substitution mit $\tilde{y} = \sin^2\frac{\varphi}{2}$ gelöst werden. Warum darf in diesem Bereich $0 \le \varphi \le \pi$ angenommen werden? Schreiben Sie die Bahnkurve in

parametrischer Form, geben Sie also $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ an. Zeigen Sie schließlich, dass sich die gefundene Lösung auf den rechten Bereich $x_{\text{min}} \leq x \leq x_E$ fortsetzen lässt, indem einfach Winkel $\varphi > \pi$ betrachtet werden.
Ergebnis: $x(\varphi) = \frac{1}{4c^2 g}(\varphi - \varphi_S - \sin\varphi + \sin\varphi_S)$

(c) Wir betrachten nun den Spezialfall $v_0 = 0$. Bestimmen Sie c aus der Koordinate des Endpunkts E, indem Sie zuerst den Winkel φ_E aus der Gleichung für y ableiten und diesen in x einsetzen. Berechnen Sie daraus y_{min} und die insgesamt zum Durchfahren der Strecke benötigte Zeit T für eine Streckenlänge $x_E = 1$ km.

Aufgabe 21: Das Problem der Dido (*2+2+4+2+2=12 Punkte*)

Im Jahre 814 v. Chr. landete die vertriebene Prinzessin Dido von Tyros auf der Flucht an der Küste Nordafrikas, wo ein spöttischer Lokalfürst ihr soviel Land zubilligte, „wie unter die Haut eines Ochsen passt“. Die gerissene Prinzessin zerschnitt das Leder in feine Streifen und umspannte damit einen ganzen Landstrich von Küste zu Küste, auf dem sie später die phönizische Siedlung Karthago gründete. In welche Form legte Dido den Hautstreifen?

An einem geraden Flussufer soll eine Weide mit einem gegebenen Seil der Länge L so abgegrenzt werden, dass die von Fluss und Seil eingegrenzte Fläche maximal ist.
Für die Rechnung soll der Fluss die x-Achse bilden und das Seil symmetrisch rechts und links des Ursprungs sein sowie im I. und II. Quadranten verlaufen. Der Anfangspunkt des Seils ist also gegeben durch $(x_1, y_1) =$ (-a,0), der Endpunkt durch $(x_2, y_2) =$ (a,0).
Sie dürfen die Überlegung, dass y um $x = 0$ symmetrisch und dort maximal ist im folgenden ohne weitere Begründung verwenden.

(a) Stellen Sie die Bedingungen an das Seil als Gleichungen auf.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und integrieren Sie diese einmal.
Die Integrationskonstante kann einfach mit C bezeichnet werden.
[Ergebnis: $y' = \pm\sqrt{\frac{\lambda^2}{(y-C)^2} - 1}$*]*

(c) Integrieren Sie die Gleichung für y' nochmals.
Betrachten Sie dafür zunächst nur den Bereich $x > 0$.
[Lösung: $y = C + \sqrt{\lambda^2 - (x+b)^2}$ *mit* $b^2 = \lambda^2 - (y(0) - C)^2$*]*

(d) Vereinfachen Sie y mit Hilfe der Bedingung, dass y bei $x = 0$ maximal ist.
Verallgemeinern Sie dann die Lösung für beliebiges x aus Symmetrieüberlegungen.
Welche geometrische Form erkennen Sie?

(e) Stellen Sie Gleichungen auf, mit denen sich die verbleibenden Parameter bestimmen lassen würden und vereinfachen Sie diese soweit möglich. Insbesondere sollen evtl. auftretende Integrale berechnet werden.