KIT **SS 2015**

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 2

22. September 2015, 12-14 Uhr

Name

Matrikelnummer *Code für Ergebnisse*

Aufgabe	Punkte	Zeichen
1	/ 10	
2	/ 15	
3	/ 10	
4	/ 17	
5	/ 18	
$\sum$	/ 70	

Hinweise

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Hilfsmittel: ein (1) beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt
- Nur ausgegebenes Papier verwenden, bei Bedarf melden.
- Neue Aufgabe bitte auf neuer Seite anfangen.
- Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

Formelsammlung

Integrierte Form der Euler-Lagrange-Gleichungen:

Für $F = F(y, y')$ gilt: $$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Für $F = F(x, y')$ gilt: $$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Nützliche Integrale:

$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}$$
$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}$$
$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

Aufgabe 1: Kurzfragen (*3+4+1+2=10 Punkte*)

(a) Gegeben sind folgende Symmetrien.
Welche Größe ist jeweils erhalten?
Gibt es zyklische Koordinaten? Wenn ja, welche?
  (i) Translationsinvarianz in der Zeit
  (ii) Rotationsinvarianz um den Winkel φ
  (iii) Translationsinvarianz entlang der x-Achse

(b) Häufig hängt die Funktion $F(y, y')$ der Euler-Lagrange-Gleichungen nicht explizit von x ab. Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt:

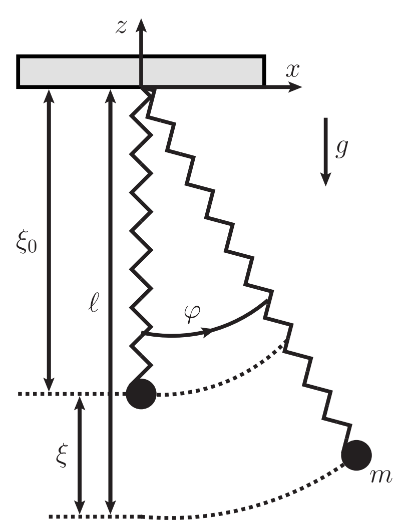
$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}\ .$$

(c) Was besagt das Noether-Theorem (in Worten)?

(d) Was ist der Zusammenhang zwischen Lagrange- und Hamilton-Funktion? Geben Sie dabei auch die Funktionsargumente explizit an.
Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

Aufgabe 2: Federpendel (*10+5=15 Punkte*)

An einem festen Aufhängepunkt an der Decke ist eine (masselose) Feder mit Federkonstante κ und Ruhelänge ℓ_0 befestigt, an dessen anderem Ende sich eine Masse m befindet. Diese schwingt im Schwerefeld g der Erde frei in der x-z-Ebene. Es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems als Funktion der Pendelauslenkung φ und der Federlänge ℓ auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.

(b) Zur Vereinfachung der Bewegungsgleichungen ist es sinnvoll, eine neue Variable $\xi = \ell - \xi_0$ einzuführen. ξ_0 ist dabei definiert als die Federlänge in der Gleichgewichtslage, in der auf die Masse m keine Kraft wirkt. Bestimmen Sie ξ_0 und drücken Sie dann die Bewegungsgleichungen durch ξ und φ, sowie m, g, κ und ξ_0 aus.

(Die Lösung der gefundenen Bewegungsgleichungen ist im allgemeinen nur numerisch möglich und soll deswegen hier nicht weiter verfolgt werden.)

Aufgabe 3: Ruckmechanik (*8+2=10 Punkte*)

Eine mögliche Verallgemeinerung der Lagrange-Funktion besteht darin, höhere Ableitungen als nur die Geschwindigkeit als Argumente aufzunehmen. Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall und fügen die Beschleunigung hinzu, also $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$. $\dddot{q} \equiv \frac{\mathrm{d}^3 q}{\mathrm{d}t^3}$ wird als „Ruck“ bezeichnet, und ist der Namensgeber für diese Variante.

(a) Leiten Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen

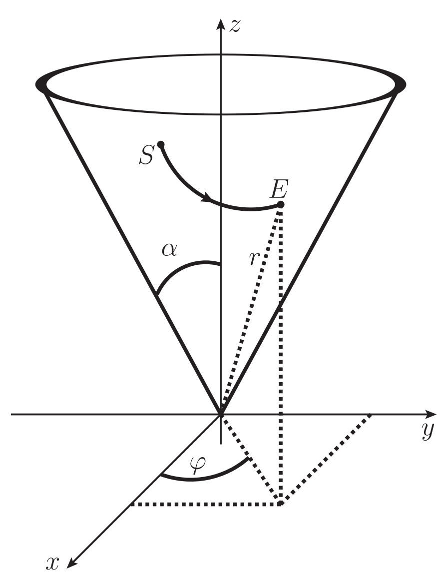
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

über das Hamiltonsche Prinzip her. Beachten Sie, dass in diesem verallgemeinerten Fall auch die Geschwindigkeit an den Endpunkten festgehalten wird.

(b) Wir betrachten die Lagrangefunktion $L = -\frac{m}{2}q\ddot{q} - \frac{k}{2}q^2$ eines eindimensionalen Problems.
Leiten Sie die zugehörige Bewegungsgleichung her. Welches physikalische Problem wird damit beschrieben?

Aufgabe 4: Geodäte auf Kreiskegelmantel (*4+8+5=17 Punkte*)

In dieser Aufgabe betrachten wir einen Kreiskegel mit halbem Öffnungswinkel α. Dessen Spitze liegt im Ursprung und er erstreckt sich in positive z-Richtung.
Verwenden Sie als Koordinaten eines Punktes P auf dem Kegelmantel den Abstand r vom Ursprung und den ebenen Polarwinkel φ (s. Skizze, hier gezeichnet für $P = E$). Punkte auf der Grundfläche des Kegels werden in dieser Aufgabe nicht betrachtet.



(a) Drücken Sie die kartesischen Koordinaten (x, y, z) von P durch r und φ aus. Zeigen Sie, dass für das Linienelement gilt:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2(\sin\alpha)^2\,.$$

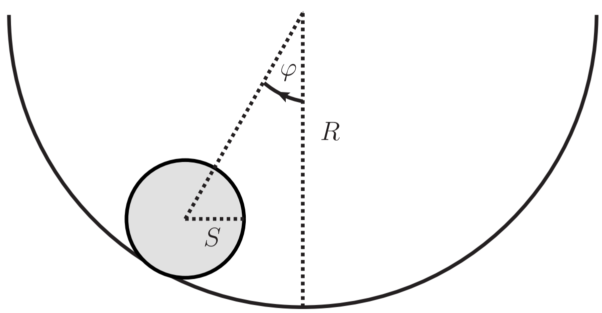
(b) Nun betrachten wir zwei Punkte S (r_S, φ_S) und E (r_E, φ_E) auf dem Kegelmantel und suchen eine Bahngleichung für die kürzeste Verbindung zwischen diesen. Für diese lässt sich, bis auf Spezialfälle, die wir hier nicht weiter betrachten wollen, der Ansatz $r = r(\varphi)$ machen.

Stellen Sie die Gleichung für die Länge L der Verbindung als Funktional $J[r]$ auf. Was muss für L gelten?
Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die zugehörige Funktion $F(r, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}, \varphi)$ auf und integrieren diese einmal. Die dabei auftretende Integrationsvariable kann einfach mit C bezeichnet werden; diese absorbiert auch die auftretende Vorzeichenambiguität.
Ergebnis: $r' = \frac{r \sin\alpha}{C} \sqrt{r^2 \sin^2\alpha - C^2}$

(c) Integrieren Sie diese Differentialgleichung nochmals, um daraus eine Bahnkurve $r(\varphi)$ zu erhalten. Setzen Sie dabei noch keine Grenzen ein, sondern fügen wiederum eine Integrationskonstante D hinzu.
Aus welchen Bedingungen lassen sich schließlich C und D bestimmen (ohne explizite Rechnung)?

Aufgabe 5: Rollender Zylinder (*4+8+6=18 Punkte*)

Auf der Innenfläche eines fest eingemauerten Zylindermantels mit Radius R rollt ein Zylinder mit Radius S, Höhe H und Masse m im homogenen Schwerefeld der Erde. Dieser hat eine radial nach außen abnehmende Dichte $\varrho(\vec{r}) = \varrho_0(S^2 - r^2)$. Die beiden Zylinderachsen sind stets parallel, es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des rollenden Zylinders um die Drehachse als Funktion von m und S.

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf. Betrachten Sie dazu den Abrollweg auf beiden Zylinderoberflächen, um eine Beziehung zwischen dem Auslenkwinkel des rollenden Zylinders, φ, und seinem Drehwinkel zu erhalten. Vergessen Sie nicht, dass sich der Auflagepunkt im körperfesten System des rollenden Zylinders ebenfalls verschiebt.

(c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung ab im Grenzfall kleiner Auslenkungen. Finden Sie die Lösung für den Fall, dass der Zylinder zur Zeit $t = 0$ mit Winkel φ_0 in Ruhe losgelassen wird.