Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 11

Abgabe: Mi, 18.01.12
Besprechung: Fr, 20.01.12

Aufgabe 17: Dilogarithmus (*5 · 2=10 Punkte*)

Eine spezielle Funktion, die sehr häufig bei der Berechnung von Schleifenintegralen vorkommt, ist der Dilogarithmus

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{t}\mathrm{d}t \ .$$

Auf den Hauptzweig, durch den Hauptzweig des $\ln(z)$ festgelegt, ist $\mathrm{Li}_2(z)$ eine eindeutige analytische Funktion für $z \in \mathbb{C}$, ausgenommen auf dem Schnitt $z > 1$ entlang der reellen Achse. Für $|z| < 1$ bekommen wir aus den Integraldarstellungen die Reihenentwicklung

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \ .$$

Als spezieller Wert ergibt sich daraus $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Um $\mathrm{Li}_2(z)$ außerhalb des Einheitskreises auswerten zu können, benötigen wir Transformationsformeln zur analytischen Fortsetzung. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $$\mathrm{Li}_2(1-z) = -\mathrm{Li}_2(z) - \ln(1-z)\ln z + \frac{\pi^2}{6} \ ,$$

(b) $$\mathrm{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -\mathrm{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\ln^2(1-z) \ ,$$

(c) $$\mathrm{Li}_2\left(\frac{z-1}{z}\right) = \mathrm{Li}_2(z) + \ln(1-z)\ln(z) - \frac{1}{2}\ln^2(z) - \frac{\pi^2}{6} \ ,$$

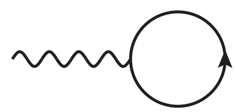
(d) $$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\ln^2(-z) - \frac{\pi^2}{6} \ ,$$

(e) $$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{1-z}\right) = \mathrm{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\ln^2(1-z) + \ln(1-z)\ln(-z) + \frac{\pi^2}{6} \ .$$

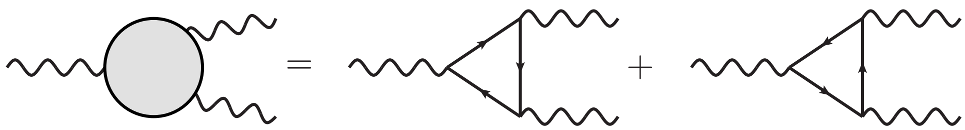
Aufgabe 18: Ein-Schleifen-Struktur der QED (*1+4+5=10 Punkte*)

In der Einschleifen-Näherung der QED treten verschiedene Typen von n-Punktfunktionen auf, deren Divergenzstruktur wir im folgenden näher untersuchen wollen. Ein Abzählen der Potenzen des Schleifenimpulses in Zähler und Nenner eines Schleifenintegrals kann eine grobe Abschätzung des erwarteten "Divergenzgrades" eines Feynman-Diagramms liefern (s. Aufgabe 14). Häufig ist eine derartige Näherung jedoch nicht hinreichend. So können zum Beispiel Symmetriebeziehungen zur teilweisen Kanzellierung von Poltermen führen.

(a) Verifizieren Sie explizit, dass das Ein-Schleifen-Diagramm, welches zur Einpunkt-Photonfunktion beiträgt, verschwindet.

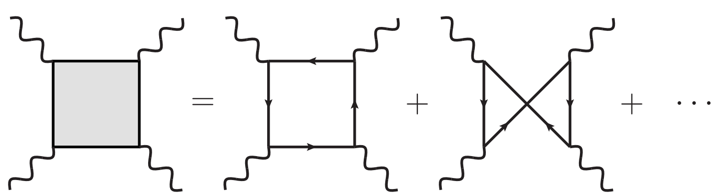


(b) Zur Dreipunktfunktion tragen in der Einschleifen-Näherung zwei Feynman-Diagramme bei. Zeigen Sie, dass sich diese gegenseitig wegheben (*Furrys Theorem*).



Verifizieren Sie dann, dass sich die Diagramme, die zu einer beliebigen n-Punkt-Photonfunktion beitragen, immer paarweise wegheben, wenn n ungerade ist.

(c) Zur Photon-Vierpunktfunktion tragen sechs Feynman-Diagramme bei:



Zeigen Sie explizit, dass sich die Divergenzen, die in Zwischenschritten der Rechnung auftreten, wegheben. Es genügt hierfür, nur die divergenten Anteile der einzelnen Diagramme zu betrachten, die von der Form

$$\propto \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma}{(p^2)^4}$$

sind.