

Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 2

Abgabe: Mi, 26.10.11

Besprechung: Fr, 28.10.11

Aufgabe 2: $SU(N)$ Darstellungen

(20 Punkte)

Die Generatoren der *fundamentalen Darstellung* der $SU(N)$ sind die λ -Matrizen (*Gell-Mann-Matrizen* für den Spezialfall der $SU(3)$):

$$\lambda_{ij}^a, \quad a = 1, \dots, N^2 - 1, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Die λ -Matrizen sind durch die Beziehung

$$\text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} \right) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$$

normiert und erfüllen die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} \left(\left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{kl} \right) \equiv \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (1)$$

Sie erfüllen die folgenden Vertauschungs- und Antivertauschungsrelationen

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (2)$$

$$\left\{ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right\} = d_{abc} \frac{\lambda^c}{2} + \frac{1}{N} \delta^{ab}, \quad (3)$$

wodurch die total antisymmetrischen $SU(N)$ Strukturkonstanten f_{abc} und die total symmetrischen d_{abc} Symbole definiert sind, welche alle reell sind. Die Vertauschungsrelation Gl. 2 ist für jede Darstellung der $SU(N)$ mit Generatoren L^a erfüllt, nicht jedoch Gl. 3.

(a) Zeigen Sie für eine beliebige Darstellung der $SU(N)$, dass

$$C_2 = L^a L^a \left(= \sum_{a=1}^{N^2-1} L^a L^a \right)$$

eine Casimir-Invariante ist, d.h. dass $[C_2, L^a] = 0$ für alle Generatoren L^a .

- (b) Zeigen Sie, dass die $N \times N$ Matrizen

$$L^a = -\frac{\lambda^{a*}}{2}$$

eine Darstellung der Lie Algebra der $SU(N)$ sind. D.h. die Matrizen erfüllen eine zu Gl. 2 analoge Vertauschungsrelation. (Beachten Sie, dass λ^{a*} die komplex konjugierte Matrix ist, *nicht* die hermitesch konjugierte!) Diese L^a sind die Generatoren der antifundamentalen ($\bar{N}$, „N-bar“) Darstellung der $SU(N)$, mit Darstellungsmatrizen $U(\theta)^*$.

- (c) Berechnen Sie den Wert von C_2 sowohl für die fundamentale Darstellung (N) als auch für die ($\bar{N}$) Darstellung.
- (d) Leiten Sie aus der Jacobi-Identität für gemischte Vertauscher und Antivertauscher

$$[A, \{B, C\}] + [B, \{C, A\}] + [C, \{A, B\}] = 0$$

eine Beziehung zwischen den f_{abc} und den d_{abc} her.

- (e) Zeigen Sie, dass

$$C_3 = d_{abc} L^a L^b L^c$$

eine Casimir-Invariante der $SU(N)$ ist.

- (f) Verwenden Sie Gl. 1, um die Summe über a in

$$\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2}$$

auszuführen.

- (g) Bestimmen Sie den Wert für C_3 für die (N)- und die ($\bar{N}$)-Darstellungen. Das Ergebnis zeigt, dass (N) und ($\bar{N}$) für $N > 2$ keine äquivalenten Darstellungen mehr sind.