

Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 3

Abgabe: Mi, 02.11.11

Besprechung: Fr, 04.11.11

Aufgabe 3: Massive QED (Stückelberg-Mechanismus) (3+2+2=7 Punkte)

Wir betrachten die QED mit nur einem Fermion ψ und dem Photon-Feld A sowie der folgenden Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu,$$

wobei sich die Felder wie folgt transformieren

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).$$

- (a) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass \mathcal{L}_{QED} eichinvariant ist, aber nicht der Term $\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{m_A^2}{2}A^\mu A_\mu$.

Eichinvarianz lässt sich erzielen, indem wir stattdessen den folgenden Term zur Lagrangedichte hinzufügen:

$$\mathcal{L}_S = \frac{m_S^2}{2}\left(A^\mu + \frac{1}{m_S}\partial^\mu\sigma\right)\left(A_\mu + \frac{1}{m_S}\partial_\mu\sigma\right)$$

mit einem zusätzlichen Skalarfeld σ .

- (b) Wie muss sich $\sigma(x)$ transformieren, sodass \mathcal{L}_S eichinvariant ist?

Für eine komplette Theorie benötigen wir noch einen zusätzlichen Term.

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu + m_S\xi\sigma)^2, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

- (c) Welche Bedingung müssen Sie an α stellen, damit auch \mathcal{L}_G eichinvariant ist?

Aufgabe 4: Goldstone-Bosonen in $O(3)$ *(1+4+1+6+1=13 Punkte)*

Wir betrachten ein Modell, das aus einem skalaren Feld $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ besteht, welches in der fundamentalen Darstellung der $O(3)$ lebt. Die zugehörige Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^\dagger (\partial^\mu \sigma) - \lambda(\sigma^2 + \mu^2)^2$$

mit reellen Parametern μ^2 und λ .

Berechnen Sie jeweils das Massenspektrum für folgende Fälle:

(a) $\mu^2 > 0$,

(b) $\mu^2 < 0$. Starten Sie mit dem Ansatz $\sigma \rightarrow \sigma' + (0, 0, v)^T$. Welchen Wert besitzt v ?

Nun wollen wir das Modell „eichen“, d.h. eine Eichwechselwirkung mit einem Vektorfeld W_μ^a einführen ($a = 1 \dots 3$). Dazu ersetzen wir wie gewohnt die partielle Ableitung in \mathcal{L} durch die kovariante

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i g t_{kl}^a W_\mu^a,$$

wobei die $t_{kl}^a = -i\varepsilon_{akl}$ die Generatoren der $O(3)$ bezeichnen.

Berechnen Sie wieder die beiden Fälle (Massen der Skalare und Vektorbosonen):

(c) $\mu^2 > 0$,

(d) $\mu^2 < 0$. Im Grundzustand lässt sich σ folgendermaßen entwickeln:

$$\sigma = e^{\frac{i}{v} t \Theta} (\sigma_0 + \eta')$$

mit $v = \sqrt{-\mu^2}$, $\sigma_0 = (0, 0, v')^T$, $\eta' = (0, 0, \eta)^T$, $\Theta = (\theta_1, \theta_2, 0)$.

Hinweis: Eichtransformationen können \mathcal{L} vereinfachen.

(e) Welcher Fall entspricht dem Higgsfeld im Standardmodell? Vergleichen Sie.

Hinweis: Die Masse m lässt sich als Koeffizient des quadratischen Terms $-\frac{m^2}{2}\sigma_i\sigma_i$ aus der Lagrangedichte ablesen.