KIT **WS 2011/12**

Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 5

Abgabe: Mi, 16.11.11
Besprechung: Fr, 18.11.11

Aufgabe 6: Grassmann-Variablen (*1+3+8+4+4=20 Punkte*)

Eine Grassmann-Variable ist eine antikommutierende Größe

$$\{\theta, \theta\} = \{\theta, \eta\} = 0 \qquad \theta, \eta \text{ Grassmann-Variable}\ .$$

Integrale über Grassmann-Variablen sind folgendermaßen definiert ($z \in \mathbb{C}$):

$$\int \mathrm{d}\theta\ z = 0 \qquad \int \mathrm{d}\theta\ z\,\theta = z \qquad \int \mathrm{d}\theta\ z\,\theta\,\eta = z\,\eta$$

$$\int \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\eta\ z = \int \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\eta\ z\,\theta = \int \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\eta\ z\,\eta = 0 \qquad \int \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\eta\ z\,\eta\,\theta = z$$

$$\int \mathrm{d}\theta\ f(\theta + \eta) = \int \mathrm{d}\theta\ f(\theta)$$

(a) Was folgt aus der Antikommutatoreigenschaft für $\theta\theta$? Wie sieht folglich die Reihenentwicklung beliebiger Funktionen $\phi(\theta)$ und $\psi(\theta, \eta)$ aus?

(b) Betrachten Sie das Gauß-Integral im Raum der N reellen Grassmann-Variablen θ_i ($i = 1, \ldots, N$):

$$I_N(M; \chi) = \int \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_N \exp(-\frac{1}{2}\theta^T M \theta + \chi^T \theta)\ ,$$

wobei M eine beliebige antisymmetrische Matrix und $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_N)^T$ ein Vektor von N unabhängigen Grassmann-Variablen sind.
Zeigen Sie für $N = 2$, dass

$$I_N(M; \chi = 0) = \sqrt{\det M}\ ,$$

indem Sie das Integral explizit auswerten.

(c) Zeigen Sie für nichtverschwindende χ, dass

$$I_N(M;\chi) = \sqrt{\det M}\,\exp(c\chi^T M^{-1}\chi) \ .$$

Zeigen Sie zuerst den Fall $N = 2$ in expliziter Rechnung. Berechnen Sie dann das Integral für beliebige N. Bestimmen Sie die reelle Konstante c.
Hinweis: Benutzen Sie eine Variablentransformation, um lineare Terme in θ im Argument der Exponentialfunktion zu eliminieren. Die Inverse einer antisymmetrischen Matrix ist ebenfalls antisymmetrisch.

(d) Wir betrachten Integrale im Raum der N Grassmann-Variablen $\eta_1, \ldots, \eta_N$. Wie verhält sich das Integrationsmaß bei einer linearen Variablentransformation

$$\eta'_j = B_{jk}\eta_k \ ?$$

Betrachten Sie zunächst nur $N = 2$ und machen Sie dann eine sinnvolle Verallgemeinerung.

(e) Verwenden Sie das Ergebnis aus (d), um das komplexe N-dimensionale Gauß-Integral

$$\int \mathrm{d}\tilde{\eta}_N \mathrm{d}\eta_N \cdots \mathrm{d}\tilde{\eta}_1 \mathrm{d}\eta_1 \exp(-\tilde{\eta} B \eta)$$

zu berechnen (B hermitesch). Tasten Sie sich wiederum von $N = 1$ und $N = 2$ zu beliebigem N vor.