Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 6

Abgabe: Mi, 23.11.11

Besprechung: Fr, 25.11.11

Aufgabe 7: Propagator des harmonischen Oszillators (1+4+2+1=8 Punkte)

Wir untersuchen den Propagator $\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle$ eines eindimensionalen Systems.

- (a) Zeigen Sie aufgrund der Vollständigkeit der Energieeigenzustände $|n\rangle$ zur Energie E_n des Systems, dass

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \sum_n \phi_n(q_f) \phi_n^*(q_i) e^{-iE_n T}, \quad (1)$$

wobei $\phi_n(q) = \langle q | n \rangle$.

- (b) Der Propagator des harmonischen Oszillators kann aus der Pfadintegraldarstellung berechnet werden und lautet

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \left[\frac{m\omega}{2\pi i \sin \omega T} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2 \sin \omega T} [(q_f^2 + q_i^2) \cos \omega T - 2q_i q_f] \right\}. \quad (2)$$

Bestimmen Sie die Grundzustandswellenfunktion $\phi_0(q)$. Betrachten Sie dazu imaginäre Zeiten $T = -it$, $t \rightarrow +\infty$ und vergleichen Sie Gl. (1) und (2).

- (c) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\phi_1(q)$ des ersten angeregten Zustands.
 (d) Zeigen Sie aus Gl. (1) und (2), dass die Energieniveaus $E_n = \omega(n + \frac{1}{2})$ lauten.

Aufgabe 8: $2 \rightarrow 2$ Phasenraum im allgemeinen Fall (5 Punkte)

Wir betrachten das Phasenraumintegral für einen allgemeinen Prozess mit zwei Teilchen

im Endzustand. Zeigen Sie, dass

$$\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) = \frac{1}{8\pi q^2} \lambda(q^2, m_1^2, m_2^2) \Theta(q_0) \Theta(q^2 - (m_1 + m_2)^2)$$

mit

$$\lambda(a^2, b^2, c^2) = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}$$

und der Heaviside-Stufenfunktion Θ gilt.

Hinweise:

- Verwenden Sie die Beziehung

$$\frac{1}{2E} = \int dp_0 \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) .$$

- Arbeiten Sie im Schwerpunktsystem der beiden Endzustandsteilchen.

Aufgabe 9: Masseloser 3-Teilchen-Phasenraum

(7 Punkte)

Berechnen Sie den 3-Teilchen-Phasenraum

$$\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2 - p_3)$$

im Fall masseloser Teilchen. Arbeiten Sie wieder im Schwerpunktsystem der auslaufenden Teilchen und drücken Sie das Resultat durch einen Vorfaktor mal

$$dx_1 dx_2 d\cos\theta_1 d\phi_2$$

aus, wobei θ_i und ϕ_i die Winkel des Impulses p_i in Kugelkoordinaten sind, und

$$x_i = \frac{2E_i}{\sqrt{q^2}} .$$