KIT **WS 2011/12**

Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 7

Abgabe: Mi, 30.11.11
Besprechung: Fr, 02.12.11

Aufgabe 10: Propagator auf dem Gitter (*1+3+6=10 Punkte*)

Um Funktionalintegrale zu bestimmen, und später dann daraus abgeleitete Größen, kann es geschickt sein, diese Berechnungen auf einem endlichen Gitter mit Kantenlänge a durchzuführen, und erst am Ende den Kontinuumslimes $a \to 0$ zu bilden. In dieser Aufgabe betrachten wir dazu ein reelles, skalares Feld $\phi(x)$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi) \ .$$

(a) Führen Sie eine Wickrotation ($t \to -i\tau$) durch, um die euklidische Lagrangedichte $\mathcal{L}_E(\tau) = -\mathcal{L}_M(t \to -i\tau)$ zu erhalten. *Hinweis:* Nutzen Sie, dass der metrische Tensor im euklidischen Raum die Einheitsmatrix ist ($g_E^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$), um das Ergebnis am Ende wieder mit Hilfe von (euklidischen) Vierervektoren zu schreiben.

Die Wirkung ist gegeben durch

$$S_E[\phi] = \int_V \mathrm{d}^4x \mathcal{L}_E(\phi(x)) \simeq a^4 \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}_E(\phi(x_i)) \ ,$$

wobei wir im letzten Schritt das Integral diskretisiert haben, und die Summe über alle Gitterpunkte geht. Analog definieren wir diskretisierte Formen des Differentialoperators

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi \to \Delta_\mu^+ \phi &:= \frac{1}{a}[\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)] \\ \text{bzw.} \quad \Delta_\mu^- \phi &:= \frac{1}{a}[\phi(x) - \phi(x - a\hat{\mu})] \\ \text{oder} \quad \Delta_\mu^\pm \phi &:= \frac{1}{2}[\Delta_\mu^+ \phi + \Delta_\mu^- \phi] \ , \end{aligned}$$

wobei $\hat{\mu}$ der Einheitsvektor in μ-Richtung ist.

(b) Entwickeln Sie $\Delta_\mu^+\phi$, $\Delta_\mu^-\phi$ und $\Delta_\mu^\pm\phi$ um x jeweils bis inklusive $\mathcal{O}(\partial_\mu^3\phi)$. Was erkennen Sie?

(c) Berechnen Sie den inversen Propagator P im Impulsraum, indem Sie die Fouriertransformation $\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\tilde{\phi}(p)e^{ip\cdot x}$ in die diskretisierte Form von S_E einsetzen. Geben Sie das Ergebnis für alle drei Varianten von $\Delta_\mu^{+,-,\pm}$ an.
Hinweise:
- Den Potentialterm $V(\phi)$ können wir hier vernachlässigen.
- Überlegen Sie sich zunächst $\Delta_\mu\phi$ nach Fouriertransformation.
- Das Endergebnis hat die Form $S_E = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\tilde{\phi}(p)\tilde{\phi}(-p)\frac{P}{2}$.
- Entwickeln Sie am Ende für kleine a, um das erwartete Resultat für P zu erhalten.
- Nützliche Identität: $a^4\sum_{i=1}^N e^{i(p+p')\cdot x} = (2\pi)^4\delta(p+p')$.

Aufgabe 11: Eichfixierungsterm (*1+1+5+3=10 Punkte*)

Aufgrund der Eichsymmetrie haben viele Feldkonfigurationen dieselbe Wirkung. Wir müssen also die Eichung fixieren und einen entsprechenden Term der Lagrangedichte hinzufügen, der dies bewerkstelligt. In der Axialeichung sieht der Eichfixierungsterm für das Photonfeld A folgendermaßen aus:

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{\lambda}{2}(n_\mu A^\mu)^2 \ .$$

Dabei ist λ ein reeller Parameter und n_μ ein beliebiger, aber festgehaltener Vierervektor.

(a) Wie sieht die vollständige Lagrangedichte für ein nicht-wechselwirkendes masseloses Photonfeld folglich aus?

(b) Wie lautet die Bewegungsgleichung für A^μ?

(c) Die Green-Funktion im Impulsraum $D_{\nu\rho}$ (die bis auf einen Faktor i dem Propagator entspricht) stellt die Lösung der Bewegungsgleichung (im Impulsraum) für eine Punktquelle dar:

$$\left[k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu + \lambda n^\mu n^\nu\right] D_{\nu\rho} = -g^\mu_\rho \ .$$

Zeigen Sie, dass die Green-Funktion im Impulsraum folgende Form hat:

$$D_{\mu\nu} = -\frac{1}{k^2}\left[g_{\mu\nu} + \frac{(k^2+\lambda n^2)k_\mu k_\nu}{\lambda(k\cdot n)^2} - \frac{k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu}{k\cdot n}\right] \ .$$

Hinweis: Machen Sie einen allgemeinen Ansatz aus allen möglichen Kombinationen von metrischem Tensor, k und n, und bestimmen Sie die Koeffizienten.

(d) Was erhalten Sie für den Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$?