KIT **WS 2011/12**

Theoretische Teilchenphysik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 9

Abgabe: Mi, 14.12.11
Besprechung: Fr, 16.12.11

Aufgabe 14: Power Counting (*4+4+5=13 Punkte*)

Eine Theorie ist renormierbar, wenn nur eine endliche Zahl von redefinierten Parametern benötigt wird, um alle Amplituden in jeder Ordnung von Störungstheorie endlich zu bekommen. Dies lässt sich naiv abschätzen, indem wir, im Grenzfall großer Impulse, die Potenz der Impulse (= Grad der Divergenz) berechnen, die nicht durch globale Viererimpulserhaltung fixiert ist.
Dies wollen wir am Beispiel einer skalaren ϕ^N-Theorie veranschaulichen ($N \geq 3$)

$$\mathcal{L}_N = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{N!}\phi^N \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass sich der Grad der Divergenz D einer Amplitude durch die Anzahl der externen Beinchen E und die Anzahl der Vertices V ausdrücken lässt als

$$D = 4 - E + (N-4)V \ .$$

Diagramme mit $D = 2$ sind quadratisch und solche mit $D = 0$ logarithmisch divergent.

(b) Zeichnen Sie alle (quadratisch oder logarithmisch) divergenten Einschleifendiagramme mit beliebiger Anzahl externer Teilchen für $N = 3, 4, 5$. Was erwarten Sie für größere N?

(c) Für welche N ist die Theorie

1. super-renormierbar: endliche Anzahl von divergenten Diagrammen;
2. renormierbar: endliche Anzahl von divergenten Green-Funktionen;
3. nicht renormierbar?

Vorgehen:
Suchen Sie die divergenten Diagramme in n-Schleifenordnung.
(Berechnen Sie $n = 2$ explizit, und folgern daraus das Ergebnis für höhere n.)
Zeigen Sie, dass je nach Fall

1. nur diejenigen Diagramme divergent sind, die ein divergentes Einschleifendiagramm als Subdiagramm enthalten, oder
2. in jeder Ordnung die Diagramme mit derselben Anzahl äußerer Beinchen (= Green-Funktion) divergent sind, oder
3. in jeder Ordnung neue divergente Green-Funktionen auftreten.

Welcher Zusammenhang besteht offenbar mit der Massendimension von λ?

Aufgabe 15: Feynman-Parametrisierung (*7 Punkte*)

Um Schleifenintegrale mit n Propagatoren in eine Standardform zu bringen, wird üblicherweise die sogenannte Feynman-Parametrisierung benutzt. Zeigen Sie

$$\frac{1}{D_1^{a_1}\cdots D_n^{a_n}} = \frac{\Gamma(a_1+\cdots+a_n)}{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_n)}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\cdots\int_0^1 \mathrm{d}x_n \frac{\delta(1-x_1-\cdots-x_n)\cdot x_1^{a_1-1}\ldots x_n^{a_n-1}}{[x_1D_1+\cdots+x_nD_n]^{a_1+\cdots+a_n}}$$

mit Hilfe vollständiger Induktion, wobei $a_i\in\mathbb{N}$, $D_i\in\mathbb{C}$ und $\Gamma(N)=(N-1)!$.
Hinweis: Leiten Sie die Gleichung nach D_1 ab und beobachten, was passiert.