KIT **WS 2012/13**

Supersymmetrie an Collidern

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 2

Besprechung: Mo, 29.10.12

Aufgabe 2: Fundamentale Darstellungen der Lorentz-Gruppe (*6+2+1+5=14 Punkte*)

Die allgemeine Form der Lorentz-Transformationen in den beiden fundamentalen Darstellungen der Lorentz-Gruppe ist gegeben durch

$$A_{L,R} = \exp\left\{-\frac{i}{2}\left(\varphi_k \mp i\nu_k\right)\sigma^k\right\}$$

mit den reellen Gruppenparametern $\vec{\varphi}$ und $\vec{\nu}$ und den Pauli-Matrizen $\vec{\sigma}$.

(a) Zunächst betrachten wir die Exponentialfunktion einer $N \times N$ Matrix A. Diese ist durch die Reihe

$$\exp A = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

definiert. S bezeichnet im folgenden eine reguläre Matrix. Zeigen Sie

(i) $(\exp A)^* = \exp A^*$,
(ii) $(\exp A)^T = \exp A^T$,
(iii) $(\exp A)^\dagger = \exp A^\dagger$,
(iv) $\exp(SAS^{-1}) = S(\exp A)S^{-1}$,
(v) $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$,
(vi) $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}\, A)$.

(b) Zeigen Sie dann für die Lorentz-Transformation:

(i) $A_R^\dagger = A_L^{-1}$,
(ii) $A_L^\dagger = A_R^{-1}$,
(iii) $\det(A_R) = \det(A_L) = 1$.

(c) Für welche Transformationen gilt $A_{R,L}^\dagger = A_{R,L}$, für welche$A_{R,L}^\dagger = A_{R,L}^{-1}$?

(d) Berechnen Sie A_R und A_L für einen reinen Boost in Richtung $\vec{e} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ mit $\vec{\nu} = \nu\vec{e}$, $\vec{\varphi} = \vec{0}$ und für eine reine Drehung um $\vec{e}$ mit $\vec{\varphi} = \varphi\vec{e}$, $\vec{\nu} = \vec{0}$.

Aufgabe 3: Zusammenhang zwischen A_L, A_R und $\Lambda^\mu{}_\nu$ (*6 Punkte*)

Für Vierervektoren lautet die allgemeine Matrix einer Lorentztransformation

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\right\}^\mu{}_\nu \qquad\qquad (M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i\left(g^{\alpha\mu}g^\beta{}_\nu - g^{\beta\nu}g^\alpha{}_\nu\right)$$

mit den antisymmetrischen Parametern $\omega_{jk} = \varepsilon_{jkl}\varphi_l$ und $\omega_{0j} = -\omega_{j0} = \nu_j$. Verifizieren Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen A_R, A_L und $\Lambda^\mu{}_\nu$

$$A_R^\dagger \sigma^\mu A_R = \Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu \ , \qquad\qquad A_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu A_L = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu$$

für infinitesimale Transformationen mit den Parametern $\delta\varphi_k$, $\delta\nu_k$. Dabei sind $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ und $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$.