KIT **WS 2012/13**

Supersymmetrie an Collidern

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 4

Besprechung: Fr, 23.11.12

Aufgabe 6: Relationen für Weyl-Spinoren (*4+4+2=10 Punkte*)

Die Schouten-Identität in zwei Dimensionen ist gegeben durch

$$\delta_a{}^{[b}\epsilon^{cd]} := \delta_a{}^b\epsilon^{cd} + \delta_a{}^c\epsilon^{db} + \delta_a{}^d\epsilon^{bc} = 0$$

für einen vollständig antikommutierenden Tensor ϵ. Sie folgt direkt aus der Tatsache, dass in n Dimensionen ein total antisymmetrisches Produkt von $n+1$ Vektoren stets verschwinden muss, da diese nicht linear unabhängig voneinander sein können.
Im folgenden bezeichnen ξ und η Weyl-Spinoren.

(a) Leiten Sie folgende Relationen aus der Schouten-Identität der antisymmetrischen Metrik ϵ ab:

$$\xi^A\eta^B = \xi^B\eta^A - \tilde{\epsilon}^{AB}(\xi\eta) \ , \qquad \xi^A\xi^B = -\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^{AB}(\xi\xi) \ ,$$
$$\bar{\xi}^{\dot{A}}\bar{\eta}^{\dot{B}} = \bar{\xi}^{\dot{B}}\bar{\eta}^{\dot{A}} + \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}(\bar{\xi}\bar{\eta}) \ , \qquad \bar{\xi}^{\dot{A}}\bar{\xi}^{\dot{B}} = +\frac{1}{2}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}(\bar{\xi}\bar{\xi}) \ .$$

(b) Zeigen Sie, dass sich die beiden Größen

$$\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\eta \equiv \bar{\xi}_{\dot{A}}\bar{\sigma}^{\mu,\dot{A}B}\eta_B \ , \qquad \xi\sigma^\mu\bar{\eta} \equiv \xi^A\sigma^\mu_{A\dot{B}}\bar{\eta}^{\dot{B}}$$

wie Vierervektoren transformieren und folgenden Relationen genügen:

$$\xi\sigma^\mu\bar{\eta} = -\bar{\eta}\bar{\sigma}^\mu\xi \ ,$$
$$\xi^A\bar{\eta}^{\dot{B}} = \frac{1}{2}\left(\xi\sigma^\mu\bar{\eta}\right)\bar{\sigma}_\mu^{A\dot{B}} \ ,$$
$$\left(\xi\sigma^\mu\bar{\eta}\right)\left(\xi\sigma^\nu\bar{\eta}\right) = \frac{1}{2}\left(\xi\xi\right)\left(\bar{\eta}\bar{\eta}\right)g^{\mu\nu} \ .$$

Nutzen Sie dabei die Identitäten

$$\bar{\sigma}^{\mu,\dot{A}B} = \epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\tilde{\epsilon}^{BD}\sigma^\mu_{D\dot{C}} \ , \qquad \sigma^\mu_{A\dot{B}}\sigma_{\mu,C\dot{D}} = 2\tilde{\epsilon}_{AC}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}} \text{ und } \qquad \mathrm{Tr}[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu] = 2g^{\mu\nu} \ .$$

(c) Wie ändern sich die Relationen aus den vorhergehenden Teilaufgaben, wenn die antikommutierenden Spinoren ξ und η durch entsprechende kommutierende Spinoren x und y ersetzt werden? Welche Symmetrie hat insbesondere das Spinorprodukt $xy \equiv x^A y_A$? Vergleichen Sie auch die Definition $\bar{x}\bar{y} \equiv (xy)^*$ mit der entsprechenden für antikommutierende Spinoren. Welcher Unterschied ergibt sich?

Aufgabe 7: Das Haag-Lopuszanski-Sohnius-Theorem (*10 Punkte, schwer*)

Im folgenden wollen wir einen Teil des HLS-Theorems beweisen.
Seien $Q_{A,r}$ und $\bar{Q}_{\dot{A},r}$ ($A = 1, 2$; $r = 1, \ldots, N$) die fermionischen Generatoren der SUSY-Algebra und P^μ der Translationsgenerator der Poincarégruppe. Setzen Sie die Poincaré-Algebra, das Transformationsverhalten der fermionischen Generatoren sowie die Relation

$$\left\{Q_{A,r}, \bar{Q}_{\dot{B},s}\right\} = 2\delta_{rs} P_{A\dot{B}}$$

mit $P_{A\dot{B}} \equiv \sigma^\mu_{A\dot{B}} P_\mu$ als bekannt voraus und zeigen Sie damit

$$[P^\mu, Q_{A,r}] = 0 \, , \qquad \left[P^\mu, \bar{Q}_{\dot{A},r}\right] = 0 \, .$$

Anleitung:
Begründen Sie zunächst den allgemeinen Ansatz

$$[P_{A\dot{B}}, Q_{C,r}] = \tilde{\epsilon}_{AC} X_{rs} \bar{Q}_{\dot{B},s}$$

mit einer $N \times N$-Matrix $X \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und leiten Sie die analoge Gleichung für $\bar{Q}$ her.
Betrachten Sie dann

$$[P_{A\dot{B}}, [P_{C\dot{D}}, Q_{E,r}]] \qquad \text{sowie} \qquad [P_{A\dot{B}}, \{Q_{C,r}, Q_{D,s}\}]$$

und benutzen Sie die Jacobi-Identität, um damit zu zeigen $X^* X = 0$ und $X_{rs} = X_{sr}$. Wie folgt daraus $X = 0$?