Physik jenseits des Standardmodells

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

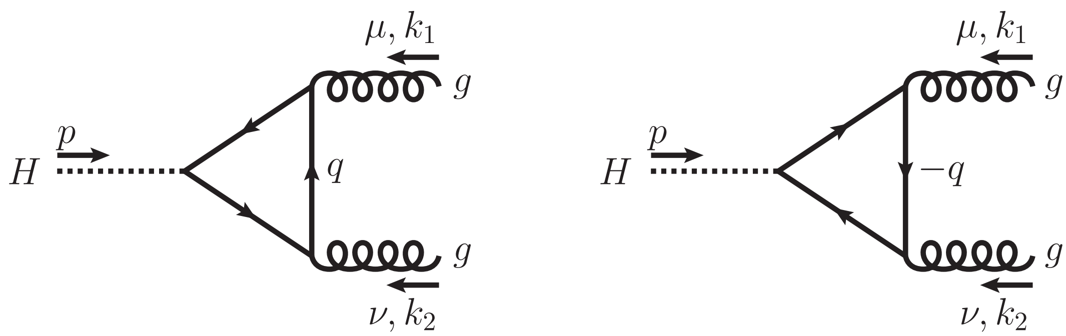
Übungsblatt 1

Besprechung: 2. und 3. Vorlesungswoche

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~rauch/BSMHiggs/`

Aufgabe 1: Higgs-Zerfall in Gluonen

Der Zerfall des Higgsbosons in Gluonen ist schleifeninduziert und wird vermittelt durch geschlossene Quark-Schleifen:



Da die Yukawa-Kopplung zwischen Higgs und Fermionen proportional zur Masse der Fermionen ist, kann man bereits vermuten, dass der Beitrag der Top-Quark-Schleife am Ende der wichtigste sein wird. Zunächst soll jedoch ein allgemeines Quark mit Masse m betrachtet werden. Alle Impulse werden als einlaufend angenommen, $p + k_1 + k_2 = 0$. Außerdem sollen das Higgsboson und die Gluonen auf der Massenschale sein, $p^2 = M_H^2$, $k_1^2 = k_2^2 = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die allgemeine Form des Higgs-Gluon-Vertizes schreiben lässt als

$$\Gamma_{ggH}^{\mu\nu,ab} = i\delta^{ab}\left[F_1(p,k_1,k_2)\left(g^{\mu\nu} - \frac{k_2^\mu k_1^\nu}{k_1\cdot k_2}\right) + F_2(p,k_1,k_2)\frac{k_1^\mu k_2^\nu}{k_1\cdot k_2}\right],$$

wobei a und b die Farbindizes der beiden Gluonen bezeichnen. Schreiben Sie dazu alle möglichen Kombinationen auf, mit denen sich aus dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ und den Impulsen k_1, k_2 ein Lorentz-Tensor zweiter Stufe bilden lässt. Nutzen Sie dann die Eichinvarianz-Bedingung $k_{1,\mu}\Gamma_{ggH}^{\mu\nu,ab} = k_{2,\nu}\Gamma_{ggH}^{\mu\nu,ab} = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $P_T^{\mu\nu} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g^{\mu\nu} - \frac{k_2^\mu k_1^\nu}{k_1\cdot k_2}\right)$ ein Projektor ist, also in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen $P_T^{\mu\nu}P_{T,\mu\nu} = \frac{D-2}{2}$, sowie $P_T^{\mu\nu}k_{1,\mu} = P_T^{\mu\nu}k_{2,\nu} = 0$ gilt.

(c) Schreiben Sie $\Gamma^{\mu\nu,ab}_{ggH}$ explizit auf, indem Sie die beiden obigen Feynman-Diagramme auswerten. Indem der Schleifenimpuls q wie oben eingezeichnet definiert wird (Impulsrichtung entlang dem Fermionpfeil), lassen sich die beiden Diagramme einfach kombinieren. Bringen Sie das Ergebnis auf die folgende Form:

$$\Gamma^{\mu\nu,ab}_{ggH} = iF\delta^{ab}\mu^{4-D}\int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D}\frac{\mathrm{Tr}[T^{\mu\nu}(k_1,k_2,m)]}{[q^2-m^2]\,[(q+k_1)^2-m^2]\,[(q-k_2)^2-m^2]}\ ,$$

wobei der Faktor F alle Konstanten absorbiert. Kontrahieren Sie dann $\mathrm{Tr}[T^{\mu\nu}]$ mit $P_{T,\mu\nu}$ und zeigen Sie, unter Ausnutzung der 4-Impuls-Erhaltung,

$$\sqrt{2}\,\mathrm{Tr}[T^{\mu\nu}]P_{T,\mu\nu} = 4m\left[2(5-D)q^2 + (2-D)M_H^2 + 2(D-1)m^2 - \frac{16(q\cdot k_1)(q\cdot k_2)}{M_H^2}\right]\ .$$

(d) Benutzen Sie die Definition des skalaren Dreipunktintegrals

$$C_0(k_1^2,k_2^2,p^2,m^2,m^2,m^2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2}\int \mathrm{d}^D q\frac{1}{[q^2-m^2][(q+k_1)^2-m^2][(q+k_1+k_2)^2-m^2]}$$

und reduzieren Sie das Schleifenintegral zu diesem sowie konstanten Termen, um F_1 zu erhalten:

$$F_1 = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi}\frac{m^2}{v}\left((4m^2-M_H^2)C_0(M_H^2,0,0,m^2,m^2,m^2)+2\right)$$

Achten Sie dabei auf Terme der Form $(D-4)B_0$, die einen endlichen Anteil ergeben.

(e) Das hier auftretende C_0-Integral lässt sich umschreiben als

$$C_0(M_H^2,0,0,m^2,m^2,m^2) = -\frac{2f(\tau)}{M_H^2}\ \text{mit}\ f(\tau) = \begin{cases}\arcsin^2\sqrt{\tau} & \tau\leq 1\\ -\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{\tau}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{\tau}}}-i\pi\right)^2 & \tau>1\end{cases}\ ,$$

wobei $\tau = \frac{M_H^2}{4m^2}$. Leiten Sie den obenstehenden Ausdruck explizit her.

(f) Betrachten Sie nun den Beitrag der Top-Quark-Schleife zu F_1 und zeigen Sie, dass dieser im Grenzfall $m_t\to\infty$ konstant und unabhängig von m_t wird.

Nützliche Formeln zum Berechnen der Schleifenintegrale:

Feynman-Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D_1^{a_1}\cdots D_n^{a_n}} &= \frac{\Gamma(a_1+\cdots+a_n)}{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_n)}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\cdots\int_0^1 \mathrm{d}x_n \frac{\delta(1-x_1-\cdots-x_n)\cdot x_1^{a_1-1}\dots x_n^{a_n-1}}{[x_1D_1+\cdots+x_nD_n]^{a_1+\cdots+a_n}} \\
&= \frac{\Gamma(a_1+\cdots+a_n)}{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_n)}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} \mathrm{d}x_{n-1}\times \\
&\quad\times \frac{(1-x_1-\cdots-x_{n-1})^{a_1-1}x_1^{a_2-1}\dots x_{n-1}^{a_n-1}}{[(1-x_1-\cdots-x_{n-1})D_1+x_1D_2+\cdots+x_{n-1}D_n]^{a_1+\cdots+a_n}}\,.
\end{aligned}$$

D-dimensionale Integrale:

$$\int \frac{\mathrm{d}^Dq}{(2\pi)^D}\frac{1}{(q^2-M^2+i\epsilon)^N} = i\frac{(-1)^N}{(4\pi)^{D/2}}\frac{\Gamma(N-\frac{D}{2})}{\Gamma(N)}\frac{1}{(M^2-i\epsilon)^{N-\frac{D}{2}}}$$

Dilogarithmus:

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{t}\mathrm{d}t$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2(1-z) &= -\mathrm{Li}_2(z) - \ln(1-z)\ln z + \frac{\pi^2}{6}\ , \\
\mathrm{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) &= -\mathrm{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\ln^2(1-z)\ , \\
\mathrm{Li}_2\left(\frac{z-1}{z}\right) &= \mathrm{Li}_2(z) + \ln(1-z)\ln(z) - \frac{1}{2}\ln^2(z) - \frac{\pi^2}{6}\ , \\
\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) &= -\mathrm{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\ln^2(-z) - \frac{\pi^2}{6}\ , \\
\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \mathrm{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\ln^2(1-z) + \ln(1-z)\ln(-z) + \frac{\pi^2}{6}\ .
\end{aligned}$$