

# Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

## Übungsblatt 1

Besprechung: Di, 25.10.16

Webseite zur Vorlesung: <https://www.itp.kit.edu/~rauch/TheoE/>

### Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \text{mit } [x, p] = i\hbar.$$

Zum Übergang in die Energiedarstellung definiert man zweckmäßig die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $a^\dagger$ ,  $a$  als

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{m\omega}x + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}p \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{m\omega}x - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}p \right).$$

- Berechnen Sie den Kommutator  $[a, a^\dagger]$ .
- Drücken Sie  $H$ ,  $x$  und  $p$  durch  $a$ ,  $a^\dagger$  und  $N = a^\dagger a$  aus.
- Angewandt auf Energiezustände  $|n\rangle$  wirken  $a^\dagger$ ,  $a$  als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, weil  $a^\dagger |n\rangle = c' |n+1\rangle$  und  $a |n\rangle = c |n-1\rangle$ . Bestimmen Sie die beiden Konstanten  $c$  und  $c'$ .
- Berechnen Sie schließlich die Matrixelemente von  $x$  und  $p$  in der Energiedarstellung, also  $x_{mn} = \langle m | x | n \rangle$  und  $p_{mn} = \langle m | p | n \rangle$ .

### Aufgabe 2: Anharmonischer Oszillator

Nun fügen wir zum harmonischen Oszillator aus Aufgabe 1 einen weiteren, zeitunabhängigen Term hinzu,

$$H_a = c \cdot \hbar\omega \cdot \left( \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \right)^3 \cdot x^3$$

der als kleine Störung gegenüber  $H$  angenommen werden soll.

Berechnen Sie die erste nichtverschwindende Korrektur zu den Energieeigenwerten.

Können Sie  $c$  so wählen, dass  $H_a$  tatsächlich stets eine kleine Korrektur ist?

### Aufgabe 3: Evolution des harmonischen Oszillators im Schrödinger-Bild

Der eindimensionale Oszillator aus Aufgabe 1 sei zur Zeit  $t = 0$  durch den Zustand

$$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$

in der Energiedarstellung gegeben. Berechnen Sie unter Zuhilfenahme Ihrer Ergebnisse aus Aufgabe 1

$$\langle H \rangle, \langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle, (\Delta x)^2, (\Delta p)^2$$

zu beliebigen Zeiten  $t > 0$  und überprüfen Sie schließlich die Unschärferelation.

### Aufgabe 4: Rechnen mit Vektoren im Hilbertraum

Die Vektoren  $|v_1\rangle, |v_2\rangle$  bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in einem zweidimensionalen Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Darin sind ebenfalls die Vektoren

$$|\varphi\rangle = (3 - i)|v_1\rangle + (1 + 2i)|v_2\rangle, \quad |\chi\rangle = (1 + i)|v_1\rangle + (1 - i)|v_2\rangle$$

gegeben.

- (a) Berechnen Sie das Skalarprodukt  $\langle \chi | \varphi \rangle$ .
- (b) Bestimmen Sie die Komponenten von  $|\varphi\rangle$  und  $|\chi\rangle$  bezüglich der orthonormierten Vektoren

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|v_2\rangle, \quad |u_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|v_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|v_2\rangle.$$

- (c) Gegeben sei ein linearer Operator  $A$  auf dem gleichen Hilbertraum. Zeigen Sie am obigen Beispiel explizit, dass die Spur unabhängig von der gewählten Basis ist, also dass

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1,2} \langle v_i | A | v_i \rangle = \sum_{i=1,2} \langle u_i | A | u_i \rangle.$$

- (d) Projektoren  $P_i$  auf Unterräume  $\mathcal{H}_i$  haben die Eigenschaften  $P_i^2 = P_i$  und  $\sum_i P_i = 1$  (Vollständigkeit), falls die  $\mathcal{H}_i$  den gesamten Raum  $\mathcal{H}$  aufspannen. Betrachten Sie nun die Projektoren  $P_u = |u_1\rangle \langle u_1|$  und  $P_v = |v_1\rangle \langle v_1|$ . Bestimmen Sie die Komponenten von  $P_u$  bezüglich  $|v_i\rangle$  und die von  $P_v$  bezüglich  $|u_i\rangle$ . Schreiben Sie schließlich  $P_u$  in der Basis  $|v_i\rangle$ .
- (e) Zeigen Sie die Eigenschaft der Spur eines Operators aus Teil (c) nun allgemein in einem Hilbertraum beliebiger Dimension.