Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 4

Abgabe: Fr, 18.11.16
Besprechung: Di, 22.11.16

Aufgabe 13: Drehimpulse und Oszillatoren (*4+3+1=8 Punkte*)

Wir untersuchen ein System von zwei unabhängigen harmonischen Oszillatoren (im folgenden durch +, − benannt) mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_\pm^\dagger, a_\pm$, die die üblichen Vertauschungsrelationen erfüllen. Damit definieren wir die Operatoren

$$J_\pm = \hbar a_\pm^\dagger a_\mp, \qquad J_z = \frac{\hbar}{2}\left(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-\right), \qquad N = N_+ + N_- = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die $J_\pm, J_z$ eine Drehimpulsalgebra erfüllen, also

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm\,, \qquad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z\,, \qquad [\vec{J}^2, J_z] = 0\,,$$
$$\text{wobei } \vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad \text{mit } J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad \text{und } J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{J}^2 = \hbar^2 \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} + 1\right)\,.$$

Damit müsste es also einen Zusammenhang zwischen der Besetzungszahldarstellung $|n_+, n_-\rangle$ und der Drehimpulsdarstellung $|j, m\rangle$ von Zuständen dieses Systems geben. Wie lautet dieser Zusammenhang und wie lassen sich damit Drehimpulse ganz allgemein deuten?

(c) Untersuchen Sie den Effekt der beiden Operatoren $K_+ = a_+^\dagger a_-^\dagger$ und $K_- = a_+ a_-$ auf einen beliebigen Zustand $|n_+, n_-\rangle$? Was ist also ihre Bedeutung?

Aufgabe 14: Addition von Drehimpulsen (*1+1+5=7 Punkte*)

Wir betrachten zwei Teilchen $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$, das eine mit Drehimpuls ℓ_1, das andere mit Drehimpuls ℓ_2. In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, welche Drehimpulse j das kombinierte System, z.B. ein gebundener Zustand, haben kann. Dieser lässt sich als Produktzustand $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ schreiben. Außerdem verwenden wir die Bezeichnungen $\vec{J}^{(1)} = \vec{L}^{(1)} \otimes \mathbb{1}$, $\vec{J}^{(2)} = \mathbb{1} \otimes \vec{L}^{(2)}$ sowie $\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$.

(a) Betrachten Sie die Basis des Zustandsraums des Gesamtsystems, die aus Vektoren der Form $|\ell_1, m_1\rangle \otimes |\ell_2, m_2\rangle$ besteht. Wie wirken die Operatoren $J_\pm := J_1 \pm i J_2$ und J_3 auf dieser Basis?

(b) Betrachten Sie die Eigenwerte von J_3 und zeigen Sie, dass $j_1 + j_2$ der maximal mögliche Eigenwert von $\vec{J}^2$ ist.

(c) Betrachten Sie den Fall $\ell_1 = \ell_2 = 1$.
Wie lauten die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses, $|j, m\rangle$, ausgedrückt als Linearkombinationen der gekoppelten $|1, m_1\rangle \otimes |1, m_2\rangle$-Zustände? Mit anderen Worten: Bestimmen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für $1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$. Beachten Sie die Condon-Shortley-Konvention. Sie können die Koeffizienten für $|j, -m\rangle$ aus denen für $|j, m\rangle$ durch bekannte Symmetrien bestimmen. Als letzten Zustand werden Sie vermutlich $|0, 0\rangle$ berechnen. Überprüfen sie, dass J_- auf diesen angewandt tatsächlich 0 ergibt.

Aufgabe 15: Bahndrehimpuls plus Spin (*5 Punkte*)

Betrachten Sie die Addition von Bahndrehimpuls $\vec{L}$ und Spin $\vec{S}$ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Zeigen Sie den in der Vorlesung gegebenen Ausdruck für die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses

$$\left|\ell + \frac{1}{2}, m\right\rangle = \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} + m}{2\ell + 1}} \left|\ell, m - \frac{1}{2}\right\rangle |+\rangle + \sqrt{\frac{\ell + \frac{1}{2} - m}{2\ell + 1}} \left|\ell, m + \frac{1}{2}\right\rangle |-\rangle \ ,$$

z.B. durch vollständige Induktion.