

Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 8

Abgabe: Fr, 16.12.16

Besprechung: Di, 20.12.16

Aufgabe 23: Photoelektrischer Effekt

(5+2=7 Punkte)

Der photoelektrische Effekt beschreibt die Abstrahlung eines Elektrons von einem Atom durch Absorption eines Photons. Dazu betrachten wir ein Atom mit nur einem Elektron in der innersten Schale. Dessen Wellenfunktion ist gegeben durch diejenige des Wasserstoffatoms, wobei für allgemeine Kernladungszahlen Z der Bohrradius ersetzt werden muss durch $a_0 \rightarrow \frac{a_0}{Z}$. Auf dieses wird linear polarisiertes Licht der Kreisfrequenz ω eingestrahlt. Das herausgelöste Elektron kann als ebene Welle mit Impuls $\hbar\vec{k}_f$ angenähert werden.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Wellenfunktion des Atoms, $\varphi_i(\vec{q})$.

(b) Berechnen Sie damit den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

Überprüfen Sie auch, dass die Dimension ihres Ergebnisses einem Wirkungsquerschnitt entspricht.

Hinweis: Benutzen Sie dazu den in der Vorlesung hergeleiteten Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei Photoemission eines Elektrons durch ein Strahlungsfeld mit Ausbreitungsrichtung \hat{n} , Polarisationsrichtung $\hat{\epsilon}$ und Frequenz ω ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\hbar |k_f|}{m_e \omega} \left| \hat{\epsilon} \cdot \vec{k}_f \right|^2 |\varphi_i(\vec{q})|^2 ,$$

wobei $\vec{q} = \vec{k}_f - \frac{\omega}{c} \hat{n}$.

Legen Sie das Koordinatensystem so, dass $\hat{\epsilon}$ und \hat{n} entlang der x - bzw. z -Achse ausgerichtet sind, und drücken Sie \vec{k}_f durch Kugelkoordinaten $|k_f|$, ϑ und φ aus.

Aufgabe 24: Tritium-Helium-Übergang*(5+2=7 Punkte)*

Im KATRIN-Experiment befindet sich an der Quellenseite Tritium (${}^3\text{H}$). Durch β -Zerfall erhöht sich die Kernladungszahl plötzlich auf $Z = 2$ und es entsteht ein einfach geladenes ${}^3\text{He}$ -Atom. Außerdem werden ein Elektron sowie ein Elektron-Antineutrino emittiert, welche im Experiment die entscheidende Rolle spielen, hier im weiteren aber nicht relevant sind.

- (a) Betrachten Sie das Elektron des Tritium-Atoms, welches sich dort im Grundzustand befinde. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Elektron nach dem Zerfall noch immer im Grundzustand befindet.

Die Wellenfunktion der beiden Atome erhält man aus der entsprechenden Wellenfunktion des Wasserstoffatoms, indem der Bohrradius ersetzt wird durch $a_0 \rightarrow \frac{a_0}{Z}$. Dabei ist Z die jeweilige Kernladungszahl.

- (b) Die im Tritium-Zerfall zur Verfügung stehende Energie ist ungefähr 18 keV ($1 \text{ eV} \sim 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$), die Größe des ${}^3\text{He}$ -Atoms etwa 10^{-10} m . Überprüfen Sie, dass die sich daraus ergebende Zeitskala die Annahme "plötzlich" rechtfertigt.

Aufgabe 25: Wandernder Puls*(4+2=6 Punkte)*

Wir betrachten ein Teilchen in einer Dimension in einem zunächst zeitlich konstanten Potential und betrachten das zeitunabhängige Problem als gelöst, d.h. wir kennen die Energieeigenzustände und -eigenwerte des Systems. Das Teilchen werde nun einem wandernden Puls ausgesetzt, beschrieben durch das Potential

$$V(t) = A \cdot \delta(x - ct).$$

Angenommen, das Teilchen befindet sich bei $t = -\infty$ im Grundzustand mit Eigenfunktion $\langle x|i \rangle = u_i(x)$.

- (a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei $t = +\infty$ in einem angeregten Zustand mit Eigenfunktion $\langle x|f \rangle = u_f(x)$ zu finden in erster Ordnung zeitabhängiger Störungsrechnung?
- (b) Was bedeutet dies physikalisch, wenn Sie den Puls als Superposition harmonischer Störungen auffassen, also

$$\delta(x - ct) = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x/c-t)} ?$$

Welche Rolle spielt hier die Energieerhaltung?