

# Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

## Klausur 2 – Lösung

04. April 2017, 11:00-13:00 Uhr

### Aufgabe 1: Störung zum zweidimensionalen harmonischen Oszillator

(2+3+7=12 Punkte)

- (a) Die gegebene Hamiltonfunktion lässt sich in zwei eindimensionale harmonische Oszillatoren separieren, mit Eigenzuständen  $|n_x, n_y\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle$ . Für diese gilt

$$\begin{aligned} E_{n_x, n_y} &= \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right) \\ &= \hbar\omega(n_x + n_y + 1). \end{aligned}$$

Mit  $n = n_x + n_y$  folgt

	Energie	Eigenzustände	Entartungsgrad
$n = 0$	$E_0 = \hbar\omega$	$ 0, 0\rangle$	nicht entartet
$n = 1$	$E_1 = 2\hbar\omega$	$ 1, 0\rangle,  0, 1\rangle$	2-fach entartet
$n = 2$	$E_2 = 3\hbar\omega$	$ 2, 0\rangle,  1, 1\rangle,  0, 2\rangle$	3-fach entartet
$n = 3$	$E_3 = 4\hbar\omega$	$ 3, 0\rangle,  2, 1\rangle,  1, 2\rangle,  0, 3\rangle$	4-fach entartet

- (b) Hierzu drücken wir zunächst den Störterm durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus:

$$\begin{aligned} \langle n'_x, n'_y | V | n_x, n_y \rangle &= \langle n'_x, n'_y | \delta\omega (xp_y - yp_x) | n_x, n_y \rangle \\ &= -i\delta\omega \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \\ &\quad \langle n'_x, n'_y | ((a_x + a_x^\dagger)(a_y - a_y^\dagger) - (a_y + a_y^\dagger)(a_x - a_x^\dagger)) | n_x, n_y \rangle \\ &= -i\frac{\delta\hbar\omega}{2} 2 \langle n'_x, n'_y | (a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger) | n_x, n_y \rangle \\ &= -i\delta\hbar\omega (\sqrt{n_x + 1}\sqrt{n_y}\delta_{n_x+1, n'_x}\delta_{n_y-1, n'_y} - \sqrt{n_x}\sqrt{n_y+1}\delta_{n_x-1, n'_x}\delta_{n_y+1, n'_y}). \end{aligned}$$

Der Störterm kann also nur dann beitragen, wenn  $n_x$  um eins erhöht und  $n_y$  um eins vermindert wird oder umgekehrt.

(c) •  $n = 0$ :

Dieser Zustand ist nicht entartet, es reicht also die normale Formel für zeitunabhängige, nicht-entartete Störungstheorie:

$$E_0^1 = \langle 0, 0 | V | 0, 0 \rangle \stackrel{(b)}{=} 0.$$

Damit ergibt sich für Energieeigenzustände und Energien:

$$u_0 = |0, 0\rangle : E_0 = \hbar\omega$$

•  $n = 1$ :

Aufgrund der zweifachen Entartung benötigen wir nun Störungstheorie für zeitunabhängige, entartete Zustände. Da der Störterm nur beiträgt, wenn sich  $n_x$  und  $n_y$  um eins ändern (mit entgegengesetztem Vorzeichen), sind nur die Nichtdiagonalelemente von Null verschieden:

$$\begin{aligned} \langle 1, 0 | V | 1, 0 \rangle &= \langle 0, 1 | V | 0, 1 \rangle = 0 \\ \langle 1, 0 | V | 0, 1 \rangle &= -i\delta\hbar\omega\sqrt{1}\sqrt{1} = -i\delta\hbar\omega \\ \langle 0, 1 | V | 1, 0 \rangle &= -i\delta\hbar\omega(-1)\sqrt{1}\sqrt{1} = i\delta\hbar\omega \end{aligned}$$

Die zu diagonalisierende Matrix lautet also

$$M = \delta\hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Eigenwertgleichung  $\det(M - \lambda\mathbb{1}) = 0$  folgt

$$\lambda^2 - (\delta\hbar\omega)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \pm\delta\hbar\omega.$$

Für die Eigenzustände benötigen wir nun noch die zugehörigen Eigenvektoren.

– Eigenwert  $\lambda_+ = \delta\hbar\omega$ :

$$\delta\hbar\omega \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{+1} \\ v_{+2} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad iv_{+1} = v_{+2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

– Eigenwert  $\lambda_- = -\delta\hbar\omega$ :

$$\delta\hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{-1} \\ v_{-2} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad iv_{-1} = -v_{-2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für die Energien und Energieeigenzustände:

$$\begin{aligned} u_{1,+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + i|0, 1\rangle) : E_{1,+} = \hbar\omega(2 + \delta) \\ u_{1,-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - i|0, 1\rangle) : E_{1,-} = \hbar\omega(2 - \delta). \end{aligned}$$

**Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator mit räumlich konstanter Kraft***(6+7+2=15 Punkte)*

Der Grundzustand wird im folgenden mit Index  $n = 0$  bezeichnet, sodass der  $n$ -te angeregte Zustand Index  $n$  hat.

(a) Zunächst müssen wir die angegebene Kraft in ein Potential umschreiben. Es gilt

$$F = -\frac{d}{dx}V$$

und damit

$$V = \begin{cases} -F_0 x e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Die Integrationskonstante können wir dabei beliebig wählen und setzen sie der Einfachheit halber auf Null.

Die Energieniveaus für den harmonischen Oszillator sind

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

damit folgt für die Differenz

$$\frac{E_n - E_m}{\hbar} = (n - m)\omega.$$

Jetzt können wir die Formeln für zeitabhängige Störungstheorie anwenden.

Die nullte Ordnung Störungstheorie,  $c_1^{(0)} = \delta_{10} = 0$ , verschwindet.

In erster Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} &= \frac{-i}{\hbar} \int_0^\infty dt' \langle 1 | V | 0 \rangle e^{i\frac{E_1 - E_0}{\hbar}t'} \\ &= \frac{-i}{\hbar} \int_0^\infty dt' (-F_0) e^{-\frac{t'}{\tau}} e^{i\omega t'} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \underbrace{\langle 1 | (a + a^\dagger) | 0 \rangle}_{=\sqrt{1}=1} \\ &= iF_0 \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}} \int_0^\infty dt' e^{t'(-\frac{1}{\tau} + i\omega)} \\ &= iF_0 \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}} \frac{1}{-\frac{1}{\tau} + i\omega} \left[ e^{t'(-\frac{1}{\tau} + i\omega)} \right]_0^\infty \\ &= iF_0 \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}} \frac{1}{-\frac{1}{\tau} + i\omega} \cdot (0 - 1), \end{aligned}$$

Also ist die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P_{0 \rightarrow 1} = |c_1^{(1)}|^2 = \frac{|F_0|^2}{2\hbar\omega m} \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}.$$

(b) Die nullte Ordnung verschwindet ebenso wie die erste Ordnung, da

$$c_2^{(0)} = \delta_{20} = 0,$$

$$c_2^{(1)} = \frac{-i}{\hbar} \int_0^\infty dt' \underbrace{\langle 2|V|0\rangle}_{=0} e^{i\frac{E_2-E_0}{\hbar}t'} = 0.$$

In zweiter Ordnung gilt

$$c_2^{(2)} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_0^\infty dt' e^{i\frac{E_2-E_m}{\hbar}t'} \langle 2|V|m\rangle \int_0^{t'} dt'' e^{i\frac{E_m-E_0}{\hbar}t''} \langle m|V|0\rangle.$$

Der einzige beitragende Term in der Summe ist  $m = 1$ , da  $V$  genau einen Aufsteigeoperator enthält. Mit

$$\langle 2|V|1\rangle = -F_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \omega,$$

$$\langle 1|V|0\rangle = -F_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \frac{E_1 - E_0}{\hbar} = \omega,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} c_2^{(2)} &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 F_0^2 \sqrt{2} \frac{\hbar}{2m\omega} \int_0^\infty dt' e^{t'(-\frac{1}{\tau}+i\omega)} \int_0^{t'} dt'' e^{t''(-\frac{1}{\tau}+i\omega)} \\ &= -\frac{\sqrt{2}F_0^2}{2\hbar\omega m} \int_0^\infty dt' e^{t'(-\frac{1}{\tau}+i\omega)} \frac{1}{-\frac{1}{\tau}+i\omega} \underbrace{\left[ e^{t''(-\frac{1}{\tau}+i\omega)} \right]_0^{t'}}_{=e^{t'(-\frac{1}{\tau}+i\omega)}-1} \\ &= \frac{F_0^2}{\sqrt{2}\hbar\omega m} \frac{1}{-\frac{1}{\tau}+i\omega} \int_0^\infty dt' \left( e^{t'2(-\frac{1}{\tau}+i\omega)} - e^{t'(-\frac{1}{\tau}+i\omega)} \right) \\ &= \frac{F_0^2}{\sqrt{2}\hbar\omega m} \frac{1}{2(-\frac{1}{\tau}+i\omega)^2} \underbrace{\left[ e^{t'2(-\frac{1}{\tau}+i\omega)} - 2e^{t'(-\frac{1}{\tau}+i\omega)} \right]_0^\infty}_{=-1+2=1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Übergangswahrscheinlichkeit

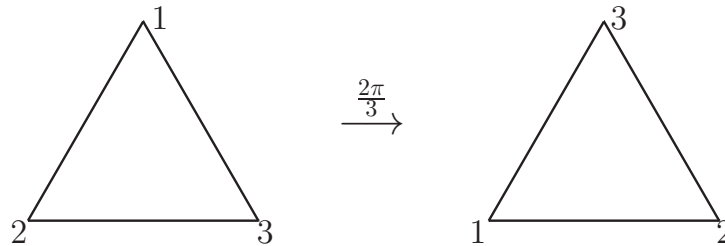
$$P_{0 \rightarrow 2} = |c_2^{(2)}|^2 = \frac{|F_0|^4}{8(\hbar\omega m)^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right)^2}.$$

(c) Jede Einsetzung von  $V$  liefert genau einen Aufsteigeoperator des harmonischen Oszillators. Damit können wir mit jeder Ordnung Störungstheorie jeweils den nächsthöheren angeregten Zustand zum ersten Mal erreichen. Die Absteigeoperatoren führen nur zu Korrekturen höherer Ordnung. Also erhalten wir die erste nichtverschwindende Korrektur zum  $n$ -ten angeregten Zustand in  $n$ -ter Ordnung Störungstheorie.

**Aufgabe 3: Identische Teilchen im Dreieck**

(4+2=6 Punkte)

- (a) Da die drei Teilchen identisch sind, können wir das System durch eine Drehung um  $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$  in sich selbst überführen.



Dasselbe können wir stattdessen durch zwei Vertauschungen erreichen

$$|123\rangle \xrightarrow{P_{12}} |213\rangle \xrightarrow{P_{23}} |312\rangle ,$$

also

$$|312\rangle = D\left(\frac{2\pi}{3}\right) |123\rangle = P_{23}P_{12} |123\rangle .$$

Andererseits lässt sich eine Drehung auch durch den Drehimpulsoperator ausdrücken

$$D\left(\frac{2\pi}{3}\right) |m\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{2\pi}{3} L_z} |m\rangle = e^{-im \frac{2\pi}{3}} |m\rangle .$$

Die Wellenfunktion von Bosonen ist symmetrisch unter Vertauschung zweier identischer Teilchen, also erhalten wir

$$\begin{aligned} D\left(\frac{2\pi}{3}\right) |m\rangle &= e^{-im \frac{2\pi}{3}} |m\rangle \\ &\stackrel{\text{Perm.}}{=} (+1)^2 |m\rangle = e^{-i2\pi n} |m\rangle , & n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \frac{1}{3}m &= n \\ m &= 3n \\ m &= 0, \pm 3, \pm 6, \dots \end{aligned}$$

$m$  muss also ein ganzzahliges Vielfaches von 3 sein.

- (b) Für Fermionen gilt nun, dass die Wellenfunktion antisymmetrisch ist unter Vertauschung zweier identischer Teilchen. Da wir aber zwei Vertauschungen benötigen und  $(-1)^2 = +1$ , ist die Rechnung vollkommen identisch zum bosonischen Fall. Also muss auch hier  $m$  ein ganzzahliges Vielfaches von 3 sein,  $m = 0, \pm 3, \pm 6, \dots$

**Aufgabe 4: Strom von Dirac-Teilchen**

(12 Punkte)

Die Wellenfunktion des Dirac-Teilchens ist gegeben durch

$$\psi(x) = e^{-i\frac{p \cdot x}{\hbar}} w(p),$$

$$w(p) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen den Strom komponentenweise:

- $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned} j^0 &= ce^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}} e^{-i\frac{p \cdot x}{\hbar}} \bar{w}(p) \gamma^0 w(p) \\ &= cw^\dagger(p) \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{=1} w(p) \\ &= c \frac{E + mc^2}{2mc^2} \left( 1, 0, \frac{cp_z}{E + mc^2}, \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \right)^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{E + mc^2}{2mc} \left( 1 + \frac{c^2 p_z^2}{(E + mc^2)^2} + \frac{c^2 (p_x^2 + p_y^2)}{(E + mc^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2mc(E + mc^2)} \left( (E + mc^2)^2 + c^2 \vec{p}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2mc(E + mc^2)} \left( E^2 + 2Emc^2 + \underbrace{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2}_{=E^2} \right) \\ &= \frac{1}{2mc(E + mc^2)} (2E(E + mc^2)) \\ &= \frac{E}{mc}. \end{aligned}$$

- $\mu = 1$ :

Berechne zunächst

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^1 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j^1 &= ce^{i\frac{p_x}{\hbar}} e^{-i\frac{p_x}{\hbar}} w^\dagger(p) \gamma^0 \gamma^1 w(p) \\
 &= c \frac{E + mc^2}{2mc^2} \left( \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} + \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2mc} c 2p_x \\
 &= \frac{p_x}{m}.
 \end{aligned}$$

- $\mu = 2$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j^2 &= ce^{i\frac{p_x}{\hbar}} e^{-i\frac{p_x}{\hbar}} w^\dagger(p) \gamma^0 \gamma^2 w(p) \\
 &= c \frac{E + mc^2}{2mc^2} \left( -i \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} + i \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2mc} c 2p_y \\
 &= \frac{p_y}{m}.
 \end{aligned}$$

- $\mu = 3$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j^3 &= ce^{i\frac{p_x}{\hbar}} e^{-i\frac{p_x}{\hbar}} w^\dagger(p) \gamma^0 \gamma^3 w(p) \\
 &= c \frac{E + mc^2}{2mc^2} \left( \frac{cp_z}{E + mc^2} \cdot 2 \right) \\
 &= \frac{1}{2mc} c 2p_z \\
 &= \frac{p_z}{m}.
 \end{aligned}$$

Also ergibt sich insgesamt für den Strom

$$j^\mu = \frac{1}{m} \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)^T.$$

Alternativ können wir den Strom im Ruhesystem des Teilchens berechnen, in dem gilt  $\vec{p} = 0$  und  $E = mc^2$ . Man sieht sofort, dass nur die erste Komponente des Spinors von Null verschieden ist und deswegen auch nur die Null-Komponente des Stroms nicht verschwindet, nämlich

$$j'^{\mu} = (c, 0, 0, 0)^T .$$

Der Strom ist also proportional zu  $p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)^T \stackrel{\text{Ruhesystem}}{=} (mc, 0, 0, 0)^T$ , also  $j'^{\mu} = \frac{1}{m} p^{\mu}$ . Dies muss in jedem Bezugssystem gelten, wobei der Vorfaktor gleich bleibt, womit man ablesen kann

$$j^{\mu} = \frac{1}{m} \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)^T .$$

Auch eine explizite Berechnung des Lorentz-Boosts liefert dasselbe Ergebnis. Dazu müssen wir den Strom noch in das richtige Bezugssystem bringen. Die entsprechende Transformationsmatrix ist gegeben durch

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \vec{\beta}^T \\ \gamma \vec{\beta} & \mathbb{1} + (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}^T}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

Diese können wir durch  $E$  und  $\vec{p}$  ausdrücken mit Hilfe der Beziehung

$$E = \gamma mc^2, \quad c\vec{p} = \gamma \vec{\beta} mc^2,$$

die direkt aus dem Lorentz-Boost eines Teilchens mit Masse  $m$  in Ruhe folgt.

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{mc^2} \begin{pmatrix} E & c\vec{p}^T \\ c\vec{p} & \mathbb{1} + \frac{c^2 \vec{p} \vec{p}^T}{E + mc^2} \end{pmatrix},$$

wobei wir noch benutzt haben

$$\begin{aligned} (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}^T}{\beta^2} &= (E - mc^2) \frac{\vec{p} \vec{p}^T}{|\vec{p}|^2} = \frac{E^2 - m^2 c^4}{E + mc^2} \frac{\vec{p} \vec{p}^T}{(E^2 - m^2 c^4)/c^2} \\ &= \frac{c^2 \vec{p} \vec{p}^T}{E + mc^2} . \end{aligned}$$

Angewandt auf  $j'^{\mu}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} j^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} j'^{\nu} \\ &= \frac{c}{mc^2} (E, c\vec{p})^T \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)^T, \end{aligned}$$

und damit dasselbe Ergebnis.